数理逻辑发展史

——从莱布尼茨到哥德尔

张家龙 著

社会科学文献出版社

本书出版得到中国社会科学院出版基金资助

数理逻辑发展史

从莱布尼茨到哥德尔

张 家 龙 著

社会科学文献出版社

(京)新登字028号

数理逻辑发展史
——从莱布尼茨到哥德尔
张家龙著

社会科学文献出版社出版发行
(北京建国门内大街5号 邮政编码:100732)
新华书店经销 中国科学院印刷厂印刷

850×1168 1/32开本 14.25 印张 370 千字
印数0001—1800
1993年8月第一版 1993年8月第一次印刷

ISBN 7-80050-398-4/B·48 定价:9.20元

序　　言

数理逻辑是一门新兴的学科，从创始至今约有300年的历史。300年来，特别是近百年来，它取得了长足的发展，在现代的数学和计算机科学中，以及在自然科学和社会科学的一些部门中都有广泛的应用。在这样的背景下，学习和研究数理逻辑发展史具有十分重要的意义。大体说来，有以下几个方面：

1．学习和研究数理逻辑发展史有助于锻炼逻辑思维能力，有助于学习数理逻辑的基本理论。一些重要成果的研究方法（如哥德尔证明不完全性定理的方法）可以启示后来者去从事新的探索，建树新的勋业。

2．我国逻辑教学和研究的现代化工作，从1978年第一次全国逻辑讨论会以来，虽然取得决定性的进展，但总的说来，还很不理想。学习和研究数理逻辑史有助于促进我国逻辑教学和研究的现代化，开创我国逻辑研究的新局面。

3．数理逻辑发展史与马克思主义哲学有密切联系。一方面，数理逻辑发展的过程充分证明了唯物辩证法的正确性；另一方面，数理逻辑史上一些重要成果具有精深的认识论意义，这就需要用马克思主义哲学观点加以总结和概括，以丰富和发展马克思主义哲学。恩格斯说：“随着自然科学领域中每一个划时代的发现，唯物主义也必然要改变自己的形式”。①列宁说：“要继承黑格尔和马克思的事业，就应当辩证地研究人类思想、科学和技术的历史。”②恩格斯和列宁的教导完全适用于数理逻辑史研究。

以上三点也正是本书想要达到的目的。

---

①《马克思恩格斯选集》，第4卷，人民出版社1972年版，第224页。

②列宁：《哲学笔记》，人民出版社1961年版，第154页。

我国的数理逻辑史研究领域原是一片末开垦的处女地，拓荒者是我的恩师王宪钧教授。他在《 数理逻辑引论》（ 北大出版社，1982）中写了一篇《 数理逻辑发展简述》，这是目前我国唯一的一部言简意赅的、肖尔兹式的数理逻辑简史。本书的写作受到这部简史的启迪和熏陶。

为节省篇幅起见，本书不详细开列参考文献目录，所引用的文献均已在脚注中标明，书末只列出以原著或原著汇编为主的一些重要文献。

最后，我要衷心感谢中国社会科学院科研局副局长黄浩涛同志、社会科学文献出版社社长沈恒炎同志、副社长邵波同志，没有他们的帮助，本书是不能与读者见面的。

张家龙

1993 年 1 月

于中国社会科学院哲学研究所

目　录

第三编　数理逻辑奠基时期

第四编　数理逻辑发展初期

第一章　导论

第一节　数理逻辑史的研究对象和分期

数理逻辑史是研究数理逻辑的发生和发展过程的一门历史性科学。

至于什么是数理逻辑，对这个问题有不同的理解。王宪钧教授在《数理逻辑引论》一书中说："狭义的数理逻辑可以说是用数学方法研究数学中演绎思维和数学基础（如无穷问题）的学科。广义的数理逻辑则包括一切用特制符号和数学方法来研究处理演绎方法的理论。广义数理逻辑较之狭义数理逻辑多包括了例如逻辑代数、内涵逻辑和现代的规范逻辑、疑问句逻辑等等。广义数理逻辑有时也被称为符号逻辑。"①笔者同意这种定义，并采用广义的理解来论述数理逻辑史。

狭义数理逻辑包括四个部分（也可以说五个部分）：(1)模型论，(2)集合论，(3)递归论，(4)证明论，以及这"四论"共同基础的经典逻辑演算（命题逻辑和一阶谓词逻辑）。广义数理逻辑还包括非经典逻辑演算的各个分支。因此，广义数理逻辑包括各种逻辑演算（经典的和非经典的）和"四论"五个部分。有的文献把一些非经典逻辑分支称为哲学逻辑（或译为"哲理逻辑"）。有的文献把逻辑演算称为现代形式逻辑。广义的数理逻辑加上现代归纳逻辑等分支有时也被称为现代逻辑。

关于数理逻辑史的分期，存在不同的看法。著名逻辑史家和

①王宪钧：《数理逻辑引论》，北京大学出版社1982年版，第257页。以下引证此书，只写书名。引用其他文献亦复如此。

哲学家波亨斯基(Bochenski）在《形式逻辑史》一书中把数理逻辑史分为四个时期：

1．前史时期：从莱布尼茨(Leibniz，1646—1716）到1847年，即布尔(G．Boole，1815—1864）的《逻辑的数学分析》出版的一年。

2．布尔时期：从1847年到1895年施罗德(E．Schröder，1841—1902)的《逻辑代数讲义》第三卷《关系代数和关系逻辑》的出版。

3. 弗雷格(G．Frege，1848—1925）时期：从他的《概念语言》一书到怀特海(A．Whitehead，1861—1947）和罗素(B. Russell，1872—1970）合著的《数学原理》三大卷的出版(1910—1913)。

4. 最近时期：从《数学原理》的出版开始。对这一时期，波亨斯基以1930年为界又再分为：从1910—1930年元逻辑兴起时期和1930年后元逻辑用形式方法系统化时期．

按照这种划分，波亨斯基还列了一张逻辑学家的时间表。①

从波亨斯基对数理逻辑史的分期和他所论述的数理逻辑史部分来看，他对数理逻辑的理解比较片面，基本上讲的是逻辑代数和逻辑演算的历史，除涉及到证明论中的哥德尔不完全性定理之外，没有谈到‘四论”的发生和发展的历史。这种处理方法根本不符合数理逻辑这门学科的历史和现状，是我们所不取的。另外，他把从莱布尼茨到1847年布尔《逻辑的数学分析》的出版说成是数理逻辑的‘前史时期”，这也是不妥的。莱布尼茨已提出了数理逻辑的基本概念,是国际公认的数理逻辑奠基人,因此,我们认为,从莱布尼茨到施罗德是数理逻辑的初创时期。前史时期只能是古典形式逻辑时期[从古希腊亚里士多德Aristotle,公元前384—前322）到近代的形式逻辑时期]，这一时期的逻辑成就及其局限性，

① Bochenski: A History of Formal Logic, Notre Dame, 1961, p.270 以下引证此书，缩写为HFL。

成了数理逻辑产生的思想来源之一，下文将要论述这个问题。

罗马尼亚逻辑史家杜米特留（A. Dumitriu）在《逻辑史》一书中把数理逻辑史分成以下时期：①

1. 先驱者：卢里（R. Lullus，1234—1315）和莱布尼茨。

2. 逻辑代数

杜米特留列举了四位英国逻辑学家：布尔（G. Boole，1815—1864），耶芳斯（W. Jevons，1835—1882），德摩根（A. de Morgan，1806—1871），麦柯尔（H. McColl，1837—1909）；这一时期还有其他三位逻辑学家 皮尔士 C. S. Peirce，1839—1914），格拉斯曼（R. Grassmann，1815—1901）和施罗德（E. Schröder，1841—1902）。

3. 数理逻辑的第一时刻

杜米特留在这一时期列举了两位逻辑学家：皮亚诺（G. Peano，1858—1932）和弗雷格（G. Frege，1848—1925）。

4. 数理逻辑的完善

罗素（B. Russell，1872—1970）和怀特海（A. N. White head，1861—1947）合著《数学原理》（3卷，1910—1913）是这一时期的标志。

杜米特留在这一时期列出了一个专题：悖论问题，涉及三位逻辑学家：布拉里－福蒂（C. Burali-Forti，1861—1931），康托尔（G. Cantor，1845—1918）和罗素

5. 数理逻辑的发展

杜米特留列举了这一时期的主要内容有：（1）直觉主义：布劳尔维（L. Brouwer，1881—1966）和海丁（A. Heyting，1899—1980），（2）逻辑主义：拉姆赛（F. P. Ramsey，1903—1930），维特根斯坦（L. Wittgenstein，1889—1951）和卡尔纳普（R. Carnap，1891—1971），（3）形式主义 希尔伯特 D. Hilbert，

---

①A. Dumitriu: History of Logic, Vol. 1V, Abacus Press, 1977, pp, 6-7。

1862 一 1943) ，阿克曼(W Ackermann, 1896 一 1962)和贝尔纳斯(P· Bernays， 1888 一1977), (4) 多值逻辑和模态逻辑：卢卡西维茨 J. Łukasiewicz， 1878 一1956) 和波兰学派，路易斯(C. I. Lewis, 1883一 1964), (5) 判定理论：哥德尔(K Gödel, 1906 一 1978)。

6· 形式技巧；卡尔纳普的语形学和塔尔斯基(A· Tarski. 1902一1983) 的语义学。

杜米特留指出，这种划分仅仅给出数理逻辑发展主要阶段的思想，没有提供有关重要问题的线索。①然而根据杜米特留在《 逻辑史》一书中对数理逻辑史的论述来看，我们觉得他的分期有一些重要缺点：1. 对应当属于分期中的集合论、模型论的早期成就没有提及，对递归论也几乎没有讲述。2. 卢里是中世纪逻辑学家，把他同莱布尼茨并列，一起作为数理逻辑的先驱者，这是不妥当的。莱布尼茨应当是数理逻辑的创始人。3. 从莱布尼茨到逻辑代数应当归并为数理逻辑的初创时期，不应把莱布尼茨同逻辑代数分为两个阶段。4.杜米特留所说的 数理逻辑的第一时刻“、数理逻辑的完善”和‘ 数理逻辑的发展”等三个阶段实际上是数理逻辑奠基时期的内容，这一时期还应加上一个重要内容 ——从素朴集合论到公理集合论的发展。5. 数理逻辑发展时期的标志应当是哥德尔完全性定理和不完全性定理的建立，而不是直觉主义、逻辑主义和形式主义学派的形成。

总之，杜米特留的数理逻辑史分期有很多弊病，我们也是不能同意的。

王宪钧教授最先在我国从事数理逻辑史的研究工作，写出一部数理逻辑简史(《 数理逻辑引论》第三篇 数理逻辑发展简述”)。他将数理逻辑史分成：1. 第一阶段，即初始阶段，从莱布尼茨到布尔、德摩根、施罗德等共延续了约二百年。2.第二阶段，19 世纪中叶数学科学的发展提出了研究数学思想方法和数学基础问题的必

① 同上，p. 7。

要性。数理逻辑适应数学的需要，联系数学实际，在六十年的时间内奠定了它的理论基础，创建了特有的新方法，取得了飞跃的发展，成长为一门新学科。这阶段的主要内容有：(1) 集合论的创建，(2) 公理方法的发展，(3）逻辑演算的建立，(4）证明论的提出。3．过渡时期，从希尔伯特计划以后直至30年代末。这一时期主要是哥德尔的工作。4．第三阶段，1940年前后到70年代是数理逻辑的发展阶段，主要内容大致分为五个方面：逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论。①

笔者基本上同意这种分期方法，但需要进行补充和修改：1．为了历史地说明数理逻辑的一个重要来源——古典形式逻辑，在初始阶段前加上一个“前史时期”是很有必要的。2．在王宪钧教授的简史中，由于篇幅的限制，因而没有包括一些重要内容，例如，皮尔士对逻辑代数和关系逻辑的发展，公理集合论的建立和发展，逻辑语义学的建立，判定问题的重要结果，等等。这些内容在数理逻辑史专著中应当加以论述。3．一般认为，哥德尔在30年代所取得的一系列重要结果，特别是不完全性定理，标志着数理逻辑的发展进入了一个新时期。正如王浩教授所说：“从1930年开始，哥德尔发表了一些有份量的结果，……开辟了数理逻辑的新纪元。”②因此，我将王宪钧教授所说的“过渡时期”改称为“数理逻辑初步发展时期”（简称为“数理逻辑发展初期”）。

综上所说，我们这部数理逻辑史专著采用以下的分期：

1．数理逻辑前史时期——古典形式逻辑时期。这一时期主要论述亚里士多德的三段论，斯多阿学派的命题逻辑和中世纪形式逻辑所取得的成就。

2．数理逻辑初创时期——逻辑代数时期。这一时期从莱布尼茨到施罗德，主要论述数理逻辑产生的社会历史背景，莱布尼茨的数理逻辑思想，逻辑代数和关系逻辑的建立和发展。

---

①《数理逻逻引论》第257—259页。
②王浩：《数理逻辑通俗讲话》，科学出版社1981年版，第5页。

3．数理逻辑奠基时期。这一时期从1879年弗雷格《概念文字》的出版到希尔伯特的元数学纲领的提出，主要论述逻辑演算的建立，素朴集合论、第三次数学危机和公理集合论，为解决第三次数学危机三大学派所取得的重要结果：逻辑类型论，直觉主义数学基础和逻辑，形式公理学和证明论。

4．数理逻辑发展初期。这一时期是20世纪30年代，主要论述哥德尔的几项重大结果——完全性定理、不完全性定理和连续统假设的一致性等，以及在哥德尔不完全性定理之后所取得的一系列成果，例如，形式语言中真值概念的定义，一般递归函数和图灵机理论，判定问题的重要成果，等等。

5．数理逻辑现代发展时期。这一时期从20世纪40年代开始，主要内容是各种非经典逻辑演算和四论——模型论、集合论、递归论和证明论的突飞猛进的发展。这一时期的历史发展不属于本书论述的范围，有兴趣的读者可以参看1977年出版的《数理逻辑手册》和80年代出版的四卷《哲学逻辑手册》。①

第二节　数理逻辑史研究中的几个方法论问题

一、数理逻辑理论的发生和发展同社会实践的辩证关系

在研究数理逻辑史时，必须以辩证唯物主义和历史唯物主义为指导。社会实践是数理逻辑的理论产生和发展的源泉。17世纪，资本主义上升时期生产力的发展，自然科学的长足进步，数学方法的广泛使用，对建立新的逻辑学的迫切需要，这些客观条件为莱布尼茨创建数理逻辑奠定了基础。但是，数理逻辑的发展与实践的联系不是机械的，除了对实践的依赖性的一面之外，还有它自

---

①Handbook of Mathematical Logic Edited by J. Barwise, North-Holland Publishing Company, 1977. Handbook of Philosophical Logic Edited by Gabbay and Guenthner, 4 vols. Reidel, Dordrecht, 1983—1988.

己的相对独立性。它具有自身发展的继承关系，有古典形式逻辑的成就作为思想前提，这也是我们在数理逻辑史的分期中列出前史时期的一个原因。数理逻辑的相对独立性还表现在，它在外观上可以走在实践的前面，尔后受实践检验，得以进一步发展，臻于完善。恩格斯说：“ 正如同在其他一切思维领域中一样，从现实世界抽象出来的规律，在一定的发展阶段上就和现实世界脱离，并且作为某种独立的东西，作为世界必须适应的外来的规律而与现实世界相对立。社会和国家方面的情形是这样，纯数学也正是这样，它在以后被应用于世界，虽然它是从这个世界得出来的，并且只表现世界的联系形式的一部分——正是仅仅因为这样，它才是可以应用的。’,①例如,作为形式系统的逻辑代数,最初是英国逻辑学家布尔用代数方法研究传统逻辑而产生的，后来在逻辑、数学和电子计算机中得到广泛的应用。非欧几何最初是从探讨平行公设的证明过程中产生的，后来在相对论中得到应用，并在天文学的观察材料中得到检验，这就证明了它确实是客观世界的空间形式的反映，并非是虚构的几何学。

总之，我们在研究数理逻辑史的时候，一方面承认数理逻辑的概念和理论的产生和发展从本源来说是由实践决定的，另一方面也承认其相对独立性，这就和机械唯物主义划清了界限，坚持了辩证唯物主义。

二、观点和材料的统一

研究数理逻辑史必须从历史事实出发，详细占有材料，从大量事实材料中形成观点。

马克思说：“ 当然，在形式上，叙述方法必须与研究方法不同。研究必须充分地占有材料，分析它的各种发展形式，探寻这些形式的内在联系。只有这项工作完成以后，现实的运动才能适当地叙

①《 马克思恩格斯选集》，第3卷，人民出版社1972年版，第78页。

述出来。这点一旦做到，材料的生命一旦观念地反映出来，呈现在我们面前的就好象是一个先验的结构了。’,①这段话对观点与材料的辩证关系做了精辟的分析。本书的写作力图按照马克思的教导去做。数理逻辑史的材料是数理逻辑史的生命，这些材料包括第一手材料和第二手材料，但应当以第一手材料为主。这样，才能形成正确的观点。笔者认为，不少数理逻辑成果具有十分丰富的哲学意义，本书对它们以马克思主义哲学为指导作了初步的概括。

在数理逻辑史的研究中，我们必须反对两种倾向：(1)不从第一手材料出发，只是摘译一些逻辑史著作中的材料和观点；(2）用现在数理逻辑教科书中的叙述来代替数理逻辑史上的原始资料。这两种倾向都违背了观点和材料的统一原则，不能算得上在真正从事数理逻辑史的研究。王宪钧教授的《数理逻辑发展简述》很好地贯彻了观点和材料的统一原则，值得数理逻辑史研究者学习。

三、逻辑方法和历史方法的统一

关于这种研究方法，恩格斯作了深刻的论述，他说：“历史常常是跳跃式地和曲折地前进的，如果必须处处跟随着它，那就势必不仅会注意许多无关紧要的材料，而且也会常常打断思想进程；并且，写经济学史又不能撇开资产阶级社会的历史，这就会使工作漫无止境，因为一切准备工作都还没有作。因此，逻辑的研究方式是唯一适用的方式。但是，实际上这种方式无非是历史的研究方式，不过摆脱了历史的形式以及起扰乱作用的偶然性而已。历史从哪里开始，思想进程也应当从哪里开始，而思想进程的进一步发展不过是历史过程在抽象的、理论上前后一贯的形式上的反映；这种反映是经过修正的，然而是按照现实的历史过程本身的规律修正的，这时，每一个要素可以在它完全成熟而具有典范形式的发展点上加以考察。”②

---

①马克思：《资本论》第一卷，人民出版社1975年版，第24页。

②《马克思恩格斯选集》，第2卷，人民出版社1972年版，第122页。

数理逻辑史是一门历史性的科学，应以历史方法为主。但数理逻辑包括五大分支，不能完全用编年史的方式来进行叙述，否则，数理逻辑史就“不仅会注意许多无关紧要的材料，而且也会常常打断思想进程”,显得杂乱无章,东鳞西爪。因此,我们在应用历史方法的同时，也必须应用逻辑方法,“按照现实的历史过程本身的规律”对思想进程的进一步发展进行“修正”。这种统一的方法具体表现在本书的结构之中。编年史的经线纵贯全书，四个时期紧密相连。每一章仿佛一条纬线，都是专门的逻辑论题。而在每一章的各节之间又有一条经线贯穿。这样，全书仿佛是由经线一纬线一经线交织而成的一张网。请读者参看目录，这里不赘述。

逻辑与历史统一的方法还有一个重要内容，简单说就是“以今论古”。马克思说:“人体解剖对于猴体解剖是一把钥匙。低等动物身上表露的高等动物的征兆，反而只有在高等动物本身已被认识之后才能理解。因此，资产阶级经济为古代经济等等提供了钥匙。……人们认识了地租，就能理解代役租、什一税等等。但是不应当把它们等同起来。”①研究数理逻辑史必须要站在今天数理逻辑的高度，这样才能深刻地认识以往的数理逻辑成果表露的当代成果的征兆，才能对数理逻辑的发展作出中肯的概括。用“人体解剖”去研究“猴体解剖”,并不是把“人体”与“猴体”等同起来,而是为了更好地理解猴体的结构，猴体身上表露的人体的征兆。卢卡西维茨首创的用数理逻辑的方法研究亚里士多德的三段论理论，取得了许多重要成果。他的方法就是“人体解剖”法。本书对前史时期——古典形式逻辑时期的论述就采用了卢卡西维茨的“人体解剖”法。这种方法也可应用于数理逻辑本身,例如,只有站在今天一阶谓词演算的高度，才能对布尔代数的成就和缺陷作出科学的评价。

---

①《马克思恩格斯选集》,第二卷,第108页。

四、严格区别哲学观点和逻辑学说

古典形式逻辑和数理逻辑都是独立的学科。但在历史上，古典形式逻辑与哲学的关系特别密切，它是从属于哲学的一个部门。数理逻辑也与哲学有密切的联系。在逻辑史上，不少逻辑学家同时又是哲学家。因此，他们的逻辑学说往往同唯心主义的哲学理论混在一起。应当如何对待这个问题呢？最根本的一条是，要严格区别逻辑学家的哲学世界观和具体的逻辑学说。本书是数理逻辑史的专著，主要任务是用马克思主义的辩证唯物主义和历史唯物主义观点分析数理逻辑的概念和理论孕育、发生和发展的过程，从中总结出规律性的东西，并对一些重要成果作出中肯的哲学概括，为丰富和发展马克思主义哲学提供数理逻辑方面的资料。为了完成我们的主要任务，我们的主要精力应当化在数理逻辑的概念和理论本身上面。本书一般不论述数理逻辑学家的哲学思想，以便与哲学史相区别。但在有些情况下，有的学者对一些数理逻辑成果作出唯心主义的解释，例如，罗素对摹状词的唯心主义概括，布劳维尔和海丁用唯心主义的直觉主义哲学去解释具体的直觉主义数学基础和逻辑，这时我们就必须对这些学者的唯心主义哲学观点进行实事求是的批判，以拯救被他们歪曲了的科学成果。

第一编　数理逻辑前史

——古典形式逻辑时期

第二章　亚里士多德的三段论

亚里士多德（Aristotle，公元前384—322）是古典形式逻辑的创始人。古典形式逻辑的建立开辟了逻辑形式化的道路。数理逻辑建立和发展的一个重要思想来源就是亚里士多德所创立的古典形式逻辑。

亚里士多德是古代希腊最伟大的哲学家，他在逻辑方面的主要成就是，在直言命题中引进了主谓项的变元，在此基础上建立了直言三段论的理论。直言三段论理论是一个形式化公理化的演绎系统，类似现今的自然演绎系统。

亚里士多德把三段论划分为三个格,每格12个有效式，其中正常式和反常式分别是6个，总共36个有效式。后世所说的第四格的6个有效式实质上就是亚里士多德三段论第一格的6个反常式。①

第一格的正常式是（‘＊’表示差等式）：Barbara, Celarent, Darii, Ferlo, ＊Barbarl, ＊Celaront;

第一格的反常式是：Baralipton（即第四格的Bramantip), Celantes（即Camenes), Dabitis（即Dimaris), Frisesomorum（即Fresison), Fapesmo（即Fesapo), ＊Celantop（即＊Came-no p).

第二格的正常式是：Cesare, Camestres, Festino, Baroco, ＊Cesaro, ＊Camestrop；反常式是：IEO, EAE, AEE, OAO,

①关于这个问题，国际上一些逻辑学者有不同看法，参看拙作《从现代逻辑观点看亚里士多德的三段论》,载《哲学研究》1988年第5期。

* EAO, * AEO。

第三格的正常式是：Disamis, Darapti, Datisi, Ferison, Felapton, Bocardo；反常式是：AAI, IAI, AII, IEO, AEO, AOO。

亚里士多德说第一格的四个式(Barbara, Celarent, Darii 和Ferio)是完善的三段论式，其余的式是不完善的，都可化归为第一格的四个式。在《前分析篇》的I.7和I.23中，他又将三段论系统作了化简，把所有三段论式都化归为第一格的两个全称式，即Barbara和Celarent。这就是说，亚里士多德把这两个式作为三段论系统的基本推理规则，相当于公理。所谓"化归"就是从Barbara和Celarent出发，使用一些推理规则，可以推出三段论的一切有效式。亚里士多德使用的主要推理规则有换位法和归于不可能法(即反三段论律)。

例如，第二格Festino的证明是这样的："如果M不属于任何N，而属于有的O，那就必然是：N不属于有的O。因为，由于否定的陈述句可换位，因而N将不属于任何M；但已认定M属于有的O；所以，N将不属于有的O。得出这个结果是凭借第一格。"①这个证明过程如下：

$$\frac{\dfrac{\text{无 N 是 M}}{\text{无 M 是 N}}\text{换位}\qquad \text{有 O 是 M}}{\text{有 O 不是 N}}\ \text{第一格 Ferio}$$

这样，第二格的Festino就化归为第一格的Ferio。在这个证明过程中，还应用了假言三段论律：无N是M推出无M是N，无M是N和有O是M推出有O不是N，所以，无N是M和有O是M推出有O不是N。亚里士多德知道假言三段论律，但他在证明过程中并没有严格加以陈述。

第一格Ferio可用反三段论律化归为第二格的Cesare。"如

①The Works of Aristotle translated into English, Vol. 1, Oxford, 1928, 27ª32. 以下引亚氏原话，均见此书。

果A不属于任何B，并且B属于有的C，A就不属于有的C。因为如果A属于所有的C，并且不属于任何B，那么，B将不属于任何C；我们已经知道，这乃是中间格。”①这个证明过程如下：

$$\frac{\text{所有B不是A，所有C是A}}{\text{所有C不是B}} \quad \text{所以，} \frac{\text{所有B不是A，有C是B}}{\text{有C不是A}}$$

这里，“有C不是A”与“所有C是A”是一对矛盾命题，“有C是B”与“所有C不是B”也是一对矛盾命题。反三段论律就是：

如果从p和q推出r，那么从p和非r推出非q；反之亦然。

同样第一格的Darii也可化归为第二格。在这之后，亚里士多德说：“由于在中间格的所有三段论式都能化归为第一格的全称三段论式，并且由于第一格的特称三段论式都能化归为中间格的三段论式，从而很清楚：这些特称三段论式都能化归为第一格的全称三段论式。”②这就是说，第一格的两个全称式是基本的推理规则。

下面，我们根据亚里士多德的原文，把三段论系统整理成一个自然演绎系统。

一、推理规则

第一组(《前分析篇》Ⅰ. 4, 7, 23):

(Ⅰ) Barbara: $\frac{MAP,\ SAM}{SAP}$

(Ⅱ) Celarent: $\frac{MEP,\ SAM}{SEP}$

第二组

(Ⅲ) A前提换位律(Ⅰ. 2): $\frac{SAP}{PIS}$

(Ⅳ) E置换律(Ⅰ. 2):

SEP可用PES置换，反之亦然。

① 29b 10—15.

② 29b 15.

(Ⅴ) 矛盾关系置换律(Ⅰ.2，5，6；Ⅱ.11，12, 13，14)：

SAP 与非 SOP, SOP 与非 SAP 可互相置换；

SEP 与非 SIP, SIP 与非 SEP 可互相置换。

(Ⅵ) 反三段论律(Ⅰ.5, 27[a]37；Ⅱ.8, 59[b]3, 59[b]28)：

$$\frac{\Gamma_1,\ \Gamma_2 / \triangle}{\Gamma_1,\ 非\triangle / 非\ \Gamma_2}$$

这是说，如果从 Γ_1，Γ_2 推出△，则从 Γ_1，非△推出 Γ_2。

(Ⅶ) 假言易位律(Ⅱ.2, 53[b]12 Ⅱ.4, 57[b]1)：

$$\frac{\Gamma / \triangle}{非\triangle / 非\ \Gamma}$$

(Ⅷ) 词项改名律(28[b]7, 59[a]17; 27[a]10, 29[b]5—10; 28[a]17—19，29[a]37—38)：

在推理中，词项可以改名，但在改名后词项数目保持不变。

(Ⅸ) 前提交换律(Ⅰ.6; Ⅱ.8, 11)：

在推理过程中，前提可以交换。

(Ⅹ) 假言三段论律(Ⅰ.5, 6; Ⅱ.4)：

如果 Γ_1 / Γ_2 并且 Γ_2，$\Gamma_3 / \triangle$，则 Γ_1，$\Gamma_3 / \triangle$;

简写为：

$$\frac{\Gamma_1,\ \Gamma_3}{\Gamma_2}, \quad \frac{\Gamma_2}{\triangle}$$

假言三段论律的另一形式是：

如果 Γ_1，Γ_2 / Γ_3，并且 $\Gamma_3 / \triangle$，则 Γ_1，$\Gamma_2 / \triangle$。

二、推演

从以上第一组两条基本规则和第二组八条辅助规则可以推出三个格的三十六个有效式。亚里士多德在构造三段论系统时，对有的辅助规则并没有明确陈述，只是在推理过程中加以使用，这是亚里士多德的不严格之处，我们已作了纠正。

下面我们看几个推演的例子。

例一 Cesare 可化归为(Ⅱ) Celarent。

亚里士多德说：“ 令M被断定不是任何N的属性，而是所有O的属性。由于否定的关系可换位，因而N将不属于任何M；而M已假定属于所有O；所以，N将不属于任何O。这是业已证明了的。 ”①这个证明的严格表述是：

$$\dfrac{\dfrac{NEM}{MEN}(IV),(VIII)\qquad OAM}{OEN}(II),(VIII),(X)$$

例二Ferio可化归为Cesare。

按上引亚里士多德的表述($29^{b}10$)，这个证明过程应写成：

$$\dfrac{\dfrac{BEA,\ CAA/CEB\ \text{例一改名}}{BEA,\ \text{非}\ CEB/\text{非}\ CAA}(VI)}{BEA,\ CIB/COA}(V)$$

例三Festino可化归为Ferioo

按上引亚里士多德的表述($27^{a}32$)，这个证明过程应写成：

$$\dfrac{\dfrac{NEM}{MEN}(IV)\qquad OIM}{OON}\ \text{例二改名}$$

我们不再进行证明了。由上可见，亚里士多德的直言三段论系统在逻辑史上第一次应用了形式化、公理化的方法，为逻辑的形式化开了先河。他还用同样的方法构造了模态三段论的系统，为模态逻辑的研究也开了先河。②著名逻辑学家肖尔兹 H Scholz, 1884—1956）说：“ 亚里士多德并没有局限在简单列举他认为是可靠的推理规则，而是头一次对逻辑作出了某种公理化。这个成就确实是很大的。……他的真正成就是，把逻辑尽量接近于作为典范的数学，在尽可能的范围内赋予逻辑以亚里士多德意义下的科学的形式。”③

---

① $27^{a}5$—10.
②参看拙作《 亚里士多德模态逻辑的现代解释》，《 哲学研究》1990年第1期。
③肖尔兹：《 简明逻辑史》，张家龙译，商务印书馆1977年，第10—11页。

第三章　斯多阿学派的命题逻辑

斯多阿学派是古希腊的一个哲学学派，他们的前驱是麦加拉学派。

麦加拉学派的欧布里得（Eubulides）发现了说谎者悖论：一个说谎的人说"我正在说谎"，那么他是在说谎，还是说真话？这一悖论现在归属于语义悖论。麦加拉学派的另一个著名人物斐洛(Philo）在西方逻辑史上第一个提出了相当于现代命题演算中实质蕴涵的真值表。

斯多阿学派发展了麦加拉学派的逻辑思想，创立了与亚里士多德的词项逻辑不同的命题逻辑。这个学派的第二创始人克吕西波（Chrysippus，约前280—209）认为，在有效的推理图式里，有5种是基本的。这5种基本的推理图式被称为不可证式：

一、如果第一则第二；第一；所以第二。

二、如果第一则第二；并非第二；第一；所以并非第一。

三、并非既是第一又是第二；第一；所以并非第二。

四、要么第一要么第二；第一；所以并非第二。

五、要么第一要么第二；并非第二；所以第一。

在上述不可证式中的序数"第一"、"第二"等就是现在所说的命题变元。

要从这5个不可证式推出其他有效式，还需要4条元推理规则：

六、如果由两个命题推演出第三个，那么由这两个命题的任一个和结论的否定一起得出另一个的否定。这是反三段论律。

七、如果我们具有推出某个结论的诸前提，那么我们也就潜在地具有包含在前提中的结论，虽然结论可以不明显地陈述出来。

这是说，由论证的诸前提推出的东西，或者由这些前提任意选出一些前提推出的东西，本身可以作为下一步推理的前提。这条规则实际上是假言三段论律的一种形式：

如果 $\Gamma_1, \Gamma_2 / \Gamma_3$，并且 $\Gamma_2, \Gamma_3 / \triangle$，那么 $\Gamma_1, \Gamma_2 / \triangle$；

如果 $\Gamma_1, \Gamma_2 / \triangle_1$，并且 $\Gamma_3, \triangle_1 / \triangle_2$，那么 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 / \triangle_2$。

八、如果两个命题推出第三个命题，而且这两个命题中有一个命题本身是由别的前提确立起来的，那么这两个命题中的另一个命题和那个前提一起就能推出原来的结论。这条规则实际上就是亚里士多德所使用的假言三段论律：

$$\frac{\dfrac{\Gamma_1 \quad \Gamma_3}{\Gamma_2},}{\triangle}。$$

九、条件化规则。一个有效的推理形式可表述成一个假言命题。例如，不可证式一可以条件化成为：

如果（如果第一则第二）并且第一，那么第二。

在现有的关于斯多阿学派逻辑学说的残篇中，只保存了第一和第三两条元规则（即上述的六和八），其余两条元规则佚失了。第二条元规则（即上述的七）是根据当代著名学者威廉·涅尔（W Kneale）和梅兹（B. Mates）的意见列上的，原先是古代学者塞克斯都·恩披里柯（Sextus Empiricus）在说明斯多阿学派的定理时提出来的；第四条元规则（即上述的条件化规则）是梅兹提出来的。①

下面我们根据现有的斯多阿学派的逻辑资料进行一些推演。

定理一至五直接得自五个不可证式。

定理六 如果第一，那么若第一则第二；第一；所以第二。

证（在以下证明中，为方便计，我们采用命题变元）

（一）如果 p，那么若 p 则 q　　　　假设

①参看威廉·涅尔等著：《逻辑学的发展》，张家龙、洪汉鼎译，商务印书馆 1985 年版，第 206—228 页；Mates. B. Stoic Logic, Berkeley and Los Angeles, 1953。

（二）p　　假设

（三）如果p则q　　（一）（二），规则一

（四）q　　（二）（三），规则一和七

以上实际上分两步来证明的，首先是从（一）（二）根据不可证式一得到（三），第二步是从（三）和（二）再据不可证式一得到（四），由这两步按规则七可从（一）（二）得到（四）。

定理七　如果第一和第二，那么第三；并非第三；另外，第一所以并非第二。

证.（一）如果p和q，那么r　　假设

（二）非r　　假设

（三）并非（p和q）　　（一）（二），规则二

（四）p　　假设

（五）非q　　（三）（四），规则三和七

这里，证明分为两步。第一步是从（一）（二）推出（三），第二步是从（三）（四）推出（五），由这两步再按规则七可从（一）（二）（四）推出（五）。

定理八　如果第一，那么第一；第一；所以第一。

结论是根据不可证式一直接从前提得出来的。

定理九　要么第一要么第二要么第三；并非第一；也非第二；所以第三。

证。（一）要么p（要么q要么r）　　假设

（二）非p　　假设

（三）要么q要么r　　（一）（二），规则五

（四）非q　　假设

（五）r　　（三）（四），规则五

斯多阿学派还提出了以下两个有趣的定理：

一个是：如果第一，那么第二；

如果第一，那么非第二；

所以，非第一。

例子是：如果你知道你死了，你是死了；

如果你知道你死了,你不是死了；

所以，你不知道你死了。

另一个定理是：如果第一，那么第一；

如果非第一，那么第一；

要么第一要么非第一；

所以,第一。

例子是：如果一个证明存在，一个证明存在；

如果一个证明不存在，一个证明存在；

要么一个证明存在要么一个证明不存在；

所以，一个证明存在。

古代文献中没有这两个定理证明的资料，威廉·涅尔应用了条件化规则证了一些定理，从而导出了这两个定理。①

现存的斯多阿学派的逻辑资料虽然不多，但从以上的一些片断材料中我们可以看出，他们创造了命题逻辑，用形式化和公理化的方法第一次构造了一个命题逻辑系统，并且在基本推理规则和元逻辑规则之间作了严格的区别。

①《逻辑学的发展》第216一225页。

第四章　中世纪的形式逻辑

在中世纪，形式逻辑作为一门独立的科学得到了发展。中世纪逻辑的发展，大致经历了三个时期：

第一时期，从中世纪开始至12世纪的阿贝拉尔(Peter Abelard, 1079一1142)，称为过渡时期。这一时期主要是进行逻辑教学，教材是波菲利(Porphyry)的论谓词的著作、亚里士多德的《范畴篇》和《解释篇》，这些著作是由古罗马逻辑学家波爱修(Boethius, 480～524)翻译成拉丁文介绍给中世纪的。波爱修详尽地探讨了命题逻辑，系统地研究了直言三段论和假言三段论，并把亚里士多德的逻辑与斯多阿学派的逻辑结合在一起。因此，波爱修的著作成了中世纪逻辑学家学习、研究逻辑的重要文献。在过渡时期的相当长的时间内，逻辑研究没有什么进展。后来，阿贝拉尔总结了亚里士多德逻辑和斯多阿学派逻辑，以及波爱修的逻辑思想,写成《论辩术》一书,为中世纪逻辑的发展奠定了基础。

第二时期,从12世纪出现亚里士多德的《前分析篇》、《后分析篇》、《论辩篇》和《辨谬篇》的拉丁文译本(1136和1141)开始至13世纪，称为创造时期。这一时期的逻辑学家有些人坚持亚里士多德传统,提倡 古代逻辑”,但更多的人提倡 现代逻辑”,主张研究新问题，他们结合拉丁语言创立了著名的‘ 词项特性”等理论。这一时期著名的逻辑学家有：大阿尔伯特(Albert the Great, 1193～ 1280), 罗伯特·克尔瓦比(Robert Kilwardby，卒于1279)，希雷斯伍德的威廉(William of Shyreswood，卒于1249)，西班牙的彼得(Peter of Spain, 1210～1277)，赖蒙德·卢里(Raimundus Lullus, 1234～1315)。西班牙的彼得著有《逻辑大全》一书，出了150版，使用了近300年，对中世纪逻辑

有很大影响。

第三时期，从14世纪的威廉·奥卡姆(Willian of Ockham，卒于1349)开始至中世纪结束，称为完善时期。这一时期是中世纪逻辑最重要的发展时期，词项特性理论得到进一步发展，创立了推论学说，发展了斯多阿学派的命题逻辑，研究了说谎者悖论及其解决方法，等等。该时期著名的逻辑学家除威廉·奥卡姆以外，还有布里丹(Buridan，卒于1358)、萨克森的阿尔伯特(Albert of Saxong，1316～1390)和威尼斯的保罗(Paul of Venice，卒于1429)等。

中世纪形式逻辑的主要成就有以下几方面。

一、助范畴词理论　中世纪逻辑学家在考察命题的成分时，把命题成分区分为两类：(一)范畴词，它可用作直言命题的主项或谓项，这是严格意义上的词项；(二)助范畴词，这类词要结合范畴词才能表意，自身不具有独立的意义。如“每一”、“无一”、“有的”、“并且”、“只有”、“或”、“如果，则”等等。范畴词是命题的实质成分，指称语言外的某个对象，如“人”、“红的”。助范畴词是命题的形式成分，在通常意义上没有所指，它在命题中仅起逻辑的作用，用以改变或修饰范畴词的所指，决定命题是何种形式。助范畴词有一种不正常的用法，例如：

(一)每一个是全称记号，

(二)并且是合取联结词。

在(一)中，“每一个”这个词是自己的名称，在(二)中，“并且”这个词也是自己的名称。这种不正常用法，现代逻辑称为“自名用法”，为避免混淆，可采用加引号的办法，这样(一)和(二)可写成：

“每一个”是全称记号。

“并且”是合取联结词。

从现代逻辑的观点来看，助范畴词相当于逻辑常项或算子(命题联结词和量词)，范畴词则是非逻辑词项。中世纪逻辑学家提出的“助范畴词决定命题形式”的理论是精辟的，表明他们对形式逻

辑这门科学的对象有正确的理解。

萨克森的阿尔伯特对助范畴词理论的贡献在中世纪逻辑学家中是最大的。他考察了很多“歧义命题”，总结出不少规律，例如：

所有人是笨蛋或人和笨蛋是笨蛋，

根据萨克森的阿尔伯特的分析，如果把上述命题当作一个合取命题，那么其两个部分：一、所有人是笨蛋或人(即所有人是笨蛋或所有人是人),二、笨蛋是笨蛋,都是真的,因此整个合取命题真。如果把上述命题作为析取命题，那么其两部分：一、所有人是笨蛋,二、人和笨蛋是笨蛋(即人是笨蛋和笨蛋是笨蛋),都是假的,因此整个析取命题是假的。我们用“p”表“所有人是笨蛋”,“q”表“所有人是人”,“r”表“笨蛋是笨蛋”,“s”表“人是笨蛋”,“∧”表“并且”,“∨”表“或”,上述歧义命题可以表示为两个不同的命题：

(一)$(p\vee q)\wedge r$。

(二)$p\vee(s\wedge r)$。

这里,助范畴词“并且”、“或”决定命题形式。

二、指代理论　指代是命题中范畴词的一种特性，即范畴词在命题中代表它所指称的东西。这种特性反映了直言命题中主项和谓项外延之间的关系。例如，在“有人是动物”这个命题中，词项“人”代表词项“动物”所代表的某物。离开了命题,一个词项就谈不到有指代的特性。

中世纪逻辑学家对指代作了各种划分。其中，最主要的是区别了实质指代和形式指代。如果一个词项指称自身或者指称一种声音,那么这个词项就具有实质指代。例如,在“人是一个名词”这个命题中,“人”指称人这个词自身,即指称人的名称,用现代逻辑的术语来说,这是“自名用法”,如果采用引号名称的办法,上例应写为:“‘人’是一个名词”。所谓形式指代,就是一个词项在命题中代表它所指称的语言外的对象。这就是说，不是自名用法的词项具有形式指代。例如,在“人是有死的”这个命题中,“人”有形式指代。中世纪逻辑关于词项的实质指代和形式指代的区分具有重

要的意义，现代逻辑已经把它们区别为符号的“使用”(use)和“提及”(mention)，形式指代相当于使用，实质指代相当于提及。如果不加区别，就会发生以下错误：

苏格拉底在跑，
苏格拉底是一个专名，
所以，一个专名在跑。

在第一个命题中“苏格拉底”有形式指代,也就是说,我们使用“苏格拉底”这个专名来代表一个个体；在第二个命题中，“苏格拉底”有实质指代,也就是说,我们提及“苏格拉底”,用的是“苏格拉底”这个专名的名称，应加上引号，这样，第二个命题应写成：

“苏格拉底”是一个专名。

由此可见，第一个命题与第二个命题是风马牛不相及的，根本就不能用为前提进行推理。

指代理论与量词有密切关系。例如，在特称肯定命题“有人是有死的”中,主项“人”具有确定的指代,即它代表至少一个个体,这个命题等值于一个析取命题，每一支命题是一个单称命题，指“这个人是有死的或那个人是有死的或第三个人是有死的或……”。只要有一个真的个别实例就能决定：具有确定指代的词项出现的命题是真的。我们用数理逻辑的工具，对中世纪逻辑学家的上述观点进行分析。我们用“S是P”作为原子命题形式，表示为“S—P”，“有S是P，表示为“∃(S—P)”，把它理解成：“(∃x)(S(x)-P(x))”(读成：有一个x使得x有S性质就是x有P性质)，用“$\longleftrightarrow$”表“等值于”，“a”、“b”表个体常项，“∨”表“或者”,上述等值关系就是：

$$(\exists x)(S(x)-P(x))\longleftrightarrow[(S(a)-P(a))\vee(S(b)-P(b))\vee\cdots\cdots]。$$

中世纪逻辑学家认为全称肯定命题的主词具有模糊的和周延的指代，就是说，它代表所指称的每一个体。“每一个人是动物”等值于“这个人是动物并且那个人是动物并且第三个人是动物并

且……”这样的合取命题。他们假定了全称肯定命题的存在涵义，认为至少要有一个主词满足谓词，因此从“每一个人是动物”可以推出“有人是动物”。我们可以把它们分析为(“∀”是全称量词符号，“∧”是合取号)：

$$(\forall x)(S(x)\rightarrow P(x))\longleftrightarrow[(S(a)\rightarrow P(a))\wedge(S(b)\rightarrow P(b))\wedge\cdots\cdots]。$$

$$\frac{(\forall x)(S(x)\rightarrow P(x))}{(\exists x)(S(x)\rightarrow P(x))}$$

萨克森的阿尔伯特制定了好几条关于指代的规则，其中有一条说：

如果周延的先行词处在一个命题中，而它的关系词处在另一个命题中，使得一个词项的周延性与另一个词项的周延性相同，那么就可用周延的先行词代替它的关系词。

例子是“每一个人在跑并且同样的人在吃”(Every man is running and the same is eating)。这里,周延的先行词是“每一个人”,关系词是“同样的人”。上述命题等值于“每一个人在跑并且每一个人在吃。

上述规则实际上反映了谓词演算的一条定理：

$$(\forall x)(F(x)\wedge G(x))\longleftrightarrow(\forall x)F(x)\wedge(\forall x)G(x)。$$

这个定理读为：对所有x而言，x是F并且x是G，等值于：所有x是F并且所有x是G。

阿尔伯特联系这条规则还讨论了表达所有格的代名词所造成的困难。例如，

(一)属于每一个人的驴子在跑(A donkey which belongs to every man is running)，

(二)每一个人的驴子在跑(Of every man a donkey is running)。

这两个命题很不相同,在(一)中至少有一头驴子满足命题,而在(二)中我们可以指明,驴子象人一样多。

(一)可表示成:

$$(\exists y)[D(y)\wedge(\forall x)(M(x)\rightarrow P(y,x)\wedge R(y))]。$$

这里“D”表“驴子”;“M”表“人”;“P”表“…为…所有”;“R”表“跑”,“→”表“如果…那么”。上述公式读为:至少有一个y使得,y是驴子并且对所有x来说,如果x是人则y属于x并且y在跑。

第二个命题可表示为:

$$(\forall x)[M(x)\rightarrow(\exists y)(D(y)\wedge P(y,x)\wedge R(y))],$$

读为:对所有x而言,如果x是人,那么有一y使得,y是驴子并且y属于x并且y在跑。

根据以上材料我们可以断言,中世纪逻辑学家已经有了二元谓词和重叠量词的概念。

三、推论学说 推论学说是中世纪逻辑学说的高峰。它继承并发展了斯多阿学派的命题逻辑。

中世纪逻辑学家对推论的理解不尽相同。有些人把推论看成是假言命题,有的把它看成是由“所以”、“因此”组成的推理,但把“前提”称为“前件”,把“结论”称为“后件”;还有的则同时采用这两种说法。

推论分为两大类,即形式推论和实质推论。如果一个推论对一切词项都有效,其形式不变,那么这个推论就是形式推论。例如:“每一个人是动物,一个人在跑,所以,一个动物在跑”。在这个推论中,如果改变词项,变为“每一个人是植物,一个人在跑,所以,一个植物在跑”,它仍是有效的。中世纪逻辑学家所说的形式推论相当于现代逻辑所说的有效推理形式。在形式推论中,前件真而后件假是不可能的。如果一个推论在保留同样形式时并非对一切词项都有效,那么这个推论就是实质的。例如,“如果有人跑,则有动物跑”,若变为“如果有马走,则有木头走”,它就不是有效的。

实质推论又分为:

（一）简单推论。如果在任何时候，不可能前件真而后件假，则推论就是简单的。这就是说，简单推论的有效性不依赖于时间因素，或者说对一切时间都有效。例如，“一个人在跑，所以，一个动物在跑”，在这个推论中，任何时候都不可能前件真而后件假。简单推论的成立是由于在前后件的词项有意义上的必然联系，如上例中的“人”和“动物”。所以只要增加一个必然命题，如“所有人是动物”，简单推论就可变为形式推论，例如，上述推论就变为“所有人是动物，一个人在跑，所以，一个动物在跑”。

（二）当下推论。当下推论仅对某一确定的时间有效，但并不总是有效，也就是说，在有些时候前件真而后件可以假。当下推论的有效性依赖于时间因素。例如，“每一动物在跑，所以，苏格拉底在跑”，这个推论只有在苏格拉底存在时才有效（假定前件真），如果苏格拉底不存在，则推论无效。在当下推论中，相对于推论的有效时间而言，前件真而后件假的情况是不会出现的。

推论与蕴涵是相互联系的。由于有以上三种推论，因而有三种蕴涵。按照布里丹、阿尔伯特、奥卡姆、威尼斯的保罗的论述，在形式推论和简单推论中，不可能前件真而后件假，而前件和后件的联系具有必然性。但在形式推论中，前件蕴涵后件是逻辑上必然的，这相当于路易斯的严格蕴涵；在简单推论中，前件蕴涵后件是意义上必然的，与上述蕴涵不同，但可化归为形式推论的蕴涵。为方便起见，我们用“$p \Rightarrow q$”表示上述两种推论或蕴涵，“$p \Rightarrow q$”是真的当且仅当“p并且非q”是不可能的，并且称“$p \Rightarrow q$”为“简单蕴涵”。与以上两种蕴涵不同，当下推论的蕴涵是实质蕴涵，我们用“$p \rightarrow q$”来表示，“$p \rightarrow q$”是真的当且仅当“p并且非q”是假的，并且称“$p \rightarrow q$”为“当下蕴涵”。

中世纪逻辑学家总共陈述了60多条推论原理，主要有：

（一）从合取命题到它的各个支命题的推论是有效的。

（二）从析取命题的任一支命题到整个析取是一个有效的推论。

（三）从条件命题的前件得到后件，是有效的推论。

（四）如果 A 推出 B，B 推出 C，则 A 推出 C。

（五）否定析取命题的一个支命题得到另一个支命题，是有效的推论。

（六）从矛盾的后件推出矛盾的前件，是有效的推论。

（七）从互相矛盾的两个命题组成的合取命题用形式推论可推出任一其它命题。

（八）析取命题的矛盾命题是一个合取命题，由析取命题各个支命题的矛盾命题组成。

（九）合取命题的矛盾命题是一个析取命题，由合取命题各个支命题的矛盾命题组成。

（十）从每一假命题可用当下推论得到任一其它命题。

（十一）每一真命题可从其它任何命题得出来。

（十二）如果后件的矛盾命题同前件是不一致的，则推论有效。

（十三）凡与前件一致者，也与后件相一致。

（十四）如果三段论是有效的，则由前提之一与结论的矛盾命题可得出另一前提的矛盾命题。

（十五）从一个三段论结论的矛盾命题可推出一个析取命题，其支命题由前提的矛盾命题所组成。

（十六）从必然命题推出实然命题。

（十七）从实然命题推出可能命题。

（十八）从不可能命题可得其它任一命题。

（十九）从任一命题得到必然命题。

（二十）从必然的合取命题推出每一支命题是必然的。

我们不必再列举了。从这些推论原理我们可以看出，中世纪逻辑学家表述推论时使用的是元语言，不过我们可以把它们转化成形式语言。我们可以把中世纪逻辑学家所表述的推论原理构造成两种蕴涵的演绎体系。布里丹和萨克森的阿尔伯特已经提出了

关于简单蕴涵系统的轮廓。当今中世纪逻辑研究专家穆迪作了进一步的整理和研究，详尽地阐述了这两个系统。①下面我们简要说明这两个系统，有的地方对穆迪的结果有所修改。

（一）简单蕴涵系统

初始概念有 1．命题，我们用 p, q, r 等表示；2．否定词（$\neg$）；3．合取词（$\wedge$）；4．可能（$\Diamond$）。

析取词、简单蕴涵和模态词“必然”的定义如下：

(0.1) $(p \vee q) =df. \neg(\neg p \wedge \neg q)$。

这个定义就是上述的（八）。

(0.2) $(p \Rightarrow q) =df. \neg\Diamond(p \wedge \neg q)$。

这个定义是根据布里丹、阿尔伯特等人关于简单推论的定义。

(0.3) $\Box p =df. \neg\Diamond\neg p$。

这是根据布里丹的论述，他指出，必然 p 就是不可能非 p。

简单蕴涵系统的基本规则有：

(1.1) $p \wedge q \Rightarrow p$。

这就是上述的（一）。

(1.2) $p \Rightarrow p \vee q$。

这就是上述的（二）。

(1.3) $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$。

(1.4) $p \vee \neg p$。

(1.5) $\neg\Diamond(p \wedge \neg p)$。

(1.3)—(1.5) 是由布里丹确立的。(1.3) 是双重否定律，(1.4) 是排中律，(1.5) 是矛盾律。

(1.6) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$。

这就是上述的（三）。

(1.7) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$。

这就是上述的（四）。

① E. A. Moody: Truth and Consequence in Mediaeval Logic, Amsterdam, 1953。

(1.8) $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$。

这就是上述的(五)。

(1.9) $p \Rightarrow \Diamond p$。

这就是上述的(十七)。

(1.10) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$。

这是说，如果前件是必然的，那么后件也是必然的。这一规则是斯特罗德(R. Strode)提出的。

(1.11) $\neg\Diamond p \Rightarrow \neg\Diamond(p \wedge q)$。

这一规则是说，如果一个命题是不可能的，那么它与另一个命题的合取也是不可能的。它是萨克森的阿尔伯特提出的。

由这些基本规则，再加上其它一些辅助规则(中世纪逻辑学家和穆迪并未阐述)，就可推出一系列定理。我认为，最重要的辅助规则有：命题变元代入规则，分离规则(由 A 和 $A \Rightarrow B$ 推出 B) 和蕴涵引入规则(如果 A 推出 B，则 $A \Rightarrow B$)。下面我们证几条定理：

(2.1) $\neg\Diamond p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$。

阿尔伯特说：“简单推论的第一条规则是：从一个不可能命题可得每一其它命题。证明：从前件和后件的唯名定义可得。因为如果一个命题是不可能的，那么以下所说就是不可能的：事情是象它所指明的但不是象其它任何命题所指明的那样；因此，不可能命题是每一其它命题的前件，从而每一命题得自不可能命题”①。

我们把他的证明用公式表示如下：

(i) $\neg\Diamond p$ ——假设

(ii) $\neg\Diamond p \Rightarrow \neg\Diamond(p \wedge \neg q)$ ——(1.11)，以 $\neg q$ 代 q

(iii) $\neg\Diamond(p \wedge \neg q)$ —— (i)(ii)，分离

(iv) $p \Rightarrow q$ —— (iii)，定义

① 转引自 HFL. p. 200。

(v) $\neg\Diamond p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ ——(i)(iv)，蕴涵引入

我们的证明补充了辅助规则，使阿尔伯特的证明严格化了，但证明过程是一致的，由此我们也可看出阿尔伯特在逻辑形式化方面所达到的高度。

(2.2) $\Box p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$。

阿尔伯特说："第二条规则是：一个必然命题得自任一命题。这也是用前件和后件的定义来证明的。因为以下所说的是不可能的：如果事情是象任一其它命题所指明的那样，那么事情就不是象必然命题所指明的那样。因此，必然命题是任一命题的后件。"①

证明。(i) $\Box p$ ——假设

(ii) $\neg\Diamond\neg p$ ——(i)，定义

(iii) $\neg\Diamond\neg p \Rightarrow \neg\Diamond(q \wedge \neg p)$ ——(1.11)，代入，合取交换

(iv) $\neg\Diamond(q \wedge \neg p)$ ——(ii)(iii)，分离

(v) $q \Rightarrow p$ ——(iv)，定义

(vi) $\Box p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ ——(i)(v)，蕴涵引入

(2.1) 和(2.2) 就是上述的(十八)和(十九)，相当于路易斯的两个严格蕴涵怪论。

著名的中世纪逻辑研究专家穆迪指出，中世纪的简单蕴涵系统类似于现代模态逻辑奠基者路易斯的模态命题演算系统 S_1。这在逻辑史上是一件饶有兴味的事情，表明中世纪的逻辑发展已达到一个相当高的形式化水平。下面我们简要地介绍当下蕴涵系统。

(二)当下蕴涵系统

初始概念是：命题(p, q，……)；否定(¬)；合取(∧)。

定义有：

$p \vee q =_{df} \neg(\neg p \wedge \neg q)$。

---

① 转引自 HFL, p. 200。

$p \to q =df. \neg(p \wedge \neg q)$。

根据简单蕴涵和当下蕴涵的定义，简单蕴涵强于当下蕴涵，这是中世纪逻辑学家的一个重要思想。在简单蕴涵系统中，将简单蕴涵变为当下蕴涵，删去模态词□和◇，简单蕴涵系统即可转化为当下蕴涵系统。例如，(2.1)和(2.2)变为：

(2.1)′ $\neg p \to (p \to q)$，

(2.2)′ $p \to (q \to p)$。

它们就是上述的(十)和(十一),即实质蕴涵的两个怪论。

再如，在简单蕴涵系统中有：

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$，

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$。

与它们相当的当下蕴涵的原理是：

$\neg(p \vee q) \longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$，

$\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$。

这些原理分别相当于后来所说的严格蕴涵的德摩根律和实质蕴涵的德摩根律。中世纪逻辑学家奥卡姆把它们概括为上述的两条推论规则(七)和(八)。中世纪的大部分推论规则都是这样陈述的。

综上所说，中世纪逻辑学家用集体的智慧创建了命题逻辑的两个系统，把斯多阿学派的命题逻辑推到崭新的高度，为数理逻辑的命题演算和模态命题演算的建立奠定了基础。

四、词项逻辑　中世纪在词项逻辑方面所取得的成就虽不及命题逻辑，但在三段论方面，中世纪逻辑学家们做了以下有价值的工作：

(一)把三段论的格和式以及它们的相互关系，总结成一套拉丁歌诀，便于初学者记忆。现在所用的三段论式的名称就来自中世纪。

(二)系统地引进和详细研究了第四格。

(三)研究了词项存在问题,即空类问题,提出在三段论中,每

一词项必须代表存在的东西。

(四)提出了带单独词项的三段论,如 每个人是动物,苏格拉底是人,所以,苏格拉底是动物 ”。

(五)提出了与三段论类似但实质上是不同的一种关系推理,如 每个人是动物,苏格拉底看见一个人,所以,苏格拉底看见一个动物。”

这些结果都是从亚里士多德以来的词项逻辑未能包容的。

五、不可解命题 中世纪逻辑学家把“ 说谎者悖论 ” 及其变种称为 不可解命题 ”。大阿尔伯特把不可解命题定义为 由一个逻辑矛盾所构成,不管承认矛盾的哪一方,另一方就可得出来。中世纪逻辑学家在研究不可解命题的过程中,发现了一大批比说谎者悖论更为复杂的语义悖论。例如,假定苏格拉底说:“ 柏拉图所说的是假的 ”,柏拉图说“: 西塞罗所说的是假的 ”,西塞罗说“: 苏格拉底所说的是假的 ” 。现问:苏格拉底所说的话是真的还是假的?我们可得:如果苏格拉底所说的话是真的,则它是假的;如果它是假的则它是真的。

中世纪逻辑学家探讨了解决悖论的方法,其中主要有4种:

(一)拒斥法。这种方法的核心是认为一个悖论不是一个命题,因为它不能说成是真的或假的,而仅仅是无意义的。当一个人说他正在说谎时,他实际上什么也没有说。

(二)限制法。这种方法规定,命题中的一个组成部分“ 是假的 ”,不可指称以它为组成部分的整个命题。这种限制方法就是不准 自我指称 ”,也就是说禁止 恶性循环 ”。

(三)解析法。这种方法认为限制法只能应用于“ 直接指谓 ” 的悖论。所谓“ 直接指谓 ” 是指在“ 我正在说的这句话是假的 ” 中,“ 假 ” 直接指谓这句话本身。但在上述苏格拉底、柏拉图和西塞罗所说的话中,苏格拉底说“: 柏拉图所说的是假的 ”是一个悖论,但“ 是假的 ” 并没有直接指谓苏格拉底所说的话本身,仅仅指谓柏拉图所说的话,如果不知道柏拉图所说的话的真假,就不可能得到苏

格拉底所说的话的真假。这就是“间接指谓”。因此只有对这种悖论进行解析，才能用限制法加以排除。

限制法和解析法实质上是同一种方法，关键是禁止恶性循环。这是后来罗素的分支类型论的萌芽形式。

这里，我们介绍布里丹的方法。①设p是一个悖论命题，例如，布里丹的悖论：“在这卷书中所写的一切语句都是假的”（假定这卷书中只有这一个语句），△p表：命题p实际上是由某人说的。从p∧△p推出p。根据p中实际出现的语词，从p可推出¬p。因此，从p∧△p推出p和¬p。这是一个逻辑矛盾，据归谬法，可得¬(p∧△p)。但¬(p∧△p)蕴涵p→¬(△p)，即如果p是真的，则并非某人说了p。另一方面，¬(p∧△p)蕴涵△p→¬p，即某人说了p蕴涵p是假的。这里，没有悖论。

（四）区别不可解命题的普通涵义和精确涵义。设A意味A是假的，它的普通涵义是指：如果A意味p，则A是真的当且仅当p；如果A意味p，则A是假的当且仅当非p。其精确涵义是指：如果A意味p，则A是真的当且仅当[(i)A是真的，并且(ii)p]；如果A意味p，则A是假的当且仅当并非[(i)A是真的，并且(ii)p]。使用精确涵义即可避免悖论。

这是威尼斯的保罗提出的解决方案。②

我们先看悖论是怎样产生的：

1. A意味A是假的。

2. 如果A意味p，则A是真的当且仅当p。

3. 如果A意味p，则A是假的当且仅当非p。

4. A是假的当且仅当A不是真的。

命题1是悖论命题本身，2—4是亚里士多德关于真假定义的各种表述。在2中以“A是假的”代p”，据1我们得到：

---

①见Styazhkin: History of Mathematical Logic from Leibnin to Peano, The M.I.T. Press, 1969, p. 46。以下引证此书简写为HML。

② 见 HFL, pp. 249—250。

5. A是真的当且仅当A是假的，与4结合起来得到：

6. A是真的当且仅当A不是真的，由此得到：

7. A不是真的，据4可得

8. A是假的。

在3中以“A是假的”代“p”，得到：

9. A是假的当且仅当A不是假的，由此立即可得：

10. A不是假的，这与8矛盾。这里出现了真正的悖论。问题出在2和3中，它们对A采用的是普通涵义。

如果我们采用精确涵义而不是普通涵义，悖论就不会发生。保留上面的命题1和4，2和3变为以下具有精确涵义的形式：

2′. 如果A意味p，则A是真的当且仅当[(i)A是真的，并且(ii)p]。

3′. 如果A意味p，则A是假的当且仅当并非[(i)A是真的，并且(ii)p]。

仿照以上的推理可得：

8′. A是假的。

但在3′中以“A是假的”代“p”得到：

9′. A是假的当且仅当并非[(i)A是真的，并且(ii)A是假的]。

由9′应用德摩根律可得：

10′. A是假的当且仅当或者(i)A不是真的，或者(ii)A不是假的。

由4可得：

11′. A是假的当且仅当或者(i)A是假的，或者(ii)A不是假的。

这个等值式的右边是排中律，因此是逻辑上永真的。由此可得左边也一定是真的：

12′. A是假的。

12′与8′不矛盾，而是同样的命题。这样，悖论就消除了。

这种区别两种涵义的方法已初步接触到语言分层次的问题。

综上所说，中世纪逻辑学家解决语义悖论的方法是很巧妙的，他们的卓越成果已被吸收进现代的逻辑语义学之中。分支类型论可以说是限制法和解析法的发展，语言层次理论是精确涵义理论的发展。

最后，我们简单说一下赖蒙德·卢里(1234～1315）的贡献。他在《大艺术》一书中，提出了概念组合术的伟大思想：由基本概念的某种组合，建立所有可能想像的命题体系。他制作了一种同心圆盘的机械装置,将基本概念(用符号表示)写在圆盘上,通过转动以组合成各种命题。卢里的概念组合术对莱布尼茨具有影响。

第二编 数理逻辑初创时期

第五章 数理逻辑产生的时代背景

数理逻辑创建于17世纪末，创始人是德国哲学家和数学家莱布尼茨(Leibniz, 1646一1716)。数理逻辑初创时期的主要特点是用代数方法处理古典形式逻辑的推理，延续了大约二百年。

17世纪是资产阶级革命的初期，资本主义正处在上升阶段，生产力获得了突飞猛进的发展。当时，工场手工业生产十分发达，行会关系瓦解，地主土地占有制发生危机，商业贸易发展，各国人民之间的经济和文化联系日益密切，这一切使得刚刚由封建社会脱胎而来的资本主义社会迅速发展。马克思在评述英国和法国革命时，特别强调它们对整个欧洲的意义："1648年的革命和1789年的革命，并不是英国的革命和法国的革命；这是欧洲范围的革命。它们不是社会中某一阶级对旧政治制度的胜利；它们宣告了欧洲新社会的政治制度。资产阶级在这两次革命中获得了胜利；然而，当时资产阶级的胜利意味着新社会制度的胜利，资产阶级所有制对封建所有制的胜利，民族对地方主义的胜利，竞争对行会制度的胜利，财产分配制对长子继承制的胜利，土地所有者支配土地制对土地所有者隶属于土地制的胜利，教育对迷信的胜利，家庭对宗教的胜利，进取精神对游侠怠惰的胜利，资产阶级法权对中世纪特权的胜利。1648年的革命是十七世纪对十六世纪的革命，1789年的革命是十八世纪对十七世纪的胜利。这两次革命不仅反映了它们本身发生的地区即英法两国的要求，而且在更大得多的程度上反映了当时整个世界的要求。"①

随着生产力的发展，自然科学得到了长足的进步。由于机器

---

①《马克思恩格斯选集》，第一卷，人民出版社1972年版，第321页。

工业、水利、商业和航海的需要，天文学和力学得到迅速的发展。在当时的自然科学中，力学占据首位。主要原因有二：一是由于技术发展了，由于在手工工场时期因生产的需要而提出了许多力学问题，由于能源主要是力（自然力，牲畜和人的体力）；二是由于认识上的因素，在当时已知的物质运动形式中，机械运动形式是最简单的一种。力学的发展又与数学密不可分。数学的成就提供了表达机械运动的形式及其计算的方法，力学的需要又推动了对数学作进一步的研究。当时科学家们用准确的数学形式确立了地球上物体和天体的机械运动规律。数学的发展是数理逻辑产生的科学前提。

由于数学方法在认识自然、发展技术方面在当时起了十分重要的作用，因而一些思想家提出了把数学方法推广到其它科学领域的设想，试图用数学方法来研究思维，把思维过程转换为数学的计算。法国哲学家笛卡尔（Descartes，1596—1650）认为数学是最重要的学科。他想把几何学、代数学和逻辑学三门学科的优点统一于一种方法。为此，就要扩大数学符号的狭窄范围，必须把那些迄今尚未取得数学名称的学科归入数学。笛卡尔认为，数学不仅是关于数的科学，而且是一门无所不包的科学，它包括了一切有次序和度量的东西，包括数目、图形、星体、声音等等。天文学、光学和声学都属于数学范围。数学方法也可应用到哲学中。笛卡尔根据这些想法，提出了建立“普遍数学”的思想。

英国哲学家霍布斯（Hobbes，1588—1679）把思维解释为一些特殊的数学推演的总和。他认为，不仅数目可以进行运算，而且线、图形和角也可以作加减运算。逻辑学所研究的就是名词、名称和三段论的运算，推理就是计算。

笛卡尔和霍布斯的这些想法为莱布尼茨创立数理逻辑提供了思想前提。

数理逻辑产生的另一个重要前提是由古典形式逻辑这门学科的性质所决定的。古典形式逻辑是研究思维的形式及其规律的科

学,从亚里士多德至17世纪，古典形式逻辑在逻辑形式化方面取得了许多成就。这为用数学方法处理古典形式逻辑创造了前提。另一方面，古典形式逻辑有局限性，这种局限性随着科学的发展日益明显。它把一个简单命题只分析成主词和谓词，这样做的后果就是取消了关系命题,例如,北京人口多于天津人口,被分析为北京人口是多于天津人口的,“北京人口”是主词,“多于天津人口的”是谓词。这种分析方法也取消了对量词的研究，古典形式逻辑虽然按“量”把命题分为全称和特称,但由于把命题限于主谓式,更由于没有引入“个体变元”的概念,因而全称量词“所有”和特称量词“有”的作用受到很大限制,我们可以说,古典形式逻辑几乎没有抓住量词的实质，只能得出量词的一些次要性质。古典形式逻辑不区分单称命题和全称命题，把单称命题当作全称命题来处理。用古典形式逻辑无法表示出科学和日常生活中大量含有量词的语句的形式结构,如“任给一个自然数,都有一个自然数比它大”。古典形式逻辑的主要内容是三段论、假言推理和选言推理等，比较简单，不能适应日益发展的科学的需要。有些逻辑学家对古典形式逻辑作了一些推广工作，例如，琼金·雍吉厄斯(Joachin Jungius，1587—1657）的《汉堡逻辑》。著名逻辑学家肖尔兹说：“它是17世纪最重要的逻辑。莱布尼茨对雍吉厄斯作了很高的评价，不断把他同伽利略和刻卜勒这些人并列。事实上,《汉堡逻辑》是一个从来不会胡说的罕有的逻辑思想家所写的。它的最大成就，在内容方面就是对推理学说作了如下的贡献：

1)引进逆关系的等价法。例如，大卫是所罗门的父亲；因此，所罗门是大卫的儿子。反之亦然。

2）引进由合到分和由分到合的推理。对这些推理，亚里士多德还不能充分处理。这些问题直到今天还能使一个‘自然，的即非逻辑斯蒂的逻辑的顽固追随者感到怏怏不快。例子如下：12是可以用4和3除尽的；因此，12可以用4除尽。——12是可以用4除尽的，12是可以用3除尽的；因此，12是可以用4和3除尽

的。

3) 引进从主格到从格的简单推理。这种推理是通过从带有主格的项的命题到至少含有一个从格的项的命题。这种推理的最有名的例子是由莱布尼茨特别选出的：所有的圆都是几何图形，因此谁画了圆就是画了一个几何图形。只有逻辑斯蒂才找到了对这种推理的正确的形式表达。

4）对从格推理的学说作了深入的讨论和改进。”①

肖尔兹的这一段对《汉堡逻辑》的评论，实际上也深刻地揭示了古典形式逻辑的局限性。

综上所说，数理逻辑不是从天上掉下来的，它有深刻的社会历史基础、自然科学基础和逻辑学本身发展的基础，具体地说，资本主义上升时期生产力的突飞猛进的发展，自然科学的长足进步，数学方法的广泛应用，古典形式逻辑在逻辑形式化方面的初步成果以及克服其局限性的客观要求，这些就是数理逻辑在十七世纪产生的前提。

①《简明逻辑史》，第42—43页。

第六章　莱布尼茨的数理逻辑思想

上一章我们论述了数理逻辑产生的历史必然性，正是在这一历史背景下，莱布尼茨提出了创建数理逻辑的伟大思 想。

莱布尼茨于1646年7月出生于莱比锡。15岁时进入莱比锡大学学法律，毕业后曾入耶拿大学学习数学和逻辑学等等学科。他的学问十分渊博，涉及很多领域。1673年，他改进了巴斯加尔的计算机，设计制造了一台性能更好的计算机，并把它献给了英国皇家学会，被选为皇家学会会员。1676年，他发明了微积分。

莱布尼茨除了自己从事科学研究之外，还积极推动科学研究事业的发展。柏林科学院就是由于他的努力创办起来的(1700)，他曾任第一任院长。

他的主要著作有《 人类理智新论》、《 单子论》等,他的很多著作和通信尚未发表。从现有的资料来看，莱布尼茨关于逻辑的论述足以表明，他是当之无愧的数理逻辑创始人。正如肖尔兹所说：“ 人们提起莱布尼茨的名字就好象是谈到日出一样。他使亚里士多德逻辑开始了‘ 新生，，这种新生的逻辑在今天的最完美的表现就是采用逻辑斯蒂形式的现代精确逻辑。……这种新东西是什么呢？它就是把逻辑加以数学化的伟大思想。①

第一节　莱布尼茨的三段论系统

莱布尼茨对亚里士多德的三段论学说评价很高，他认为：“ 三段论形式的发明是人类心灵最美好、甚至也是最值得重视的东西

①《 简明逻辑史》，第48页。

之一。”① 他继承了亚里士多德三段论中的形式化思想，把三段论构成一个形式化的演绎系统。②

他的系统与亚里士多德原来的系统有一些差异。首先，关于格和式，莱布尼茨认为三段论分4个格，每格6个式，共24个式，其中差等式5个。莱布尼茨的这种看法是对中世纪三段论学说的继承和发展。其次，他认为第一格是最基本的。第二格和第三格只要用反三段论律（莱布尼茨称之为矛盾律）化归为第一格，也就是说，从第一格用反三段论律可推出第二格和第三格。前已说过，反三段论律就是：如果p和q推出r，则非r和q推出非p；反之亦然。在进行第二格和第三格的化归时，不用换位律。第三，要把第四格化归为第一格，除了要用反三段论律之外，还需用换位律。但是，在莱布尼茨的系统中，换位律不是基本规则，要用同一律“所有A是A”来证明，这与亚里士多德不同。第四，莱布尼茨在证明差等律时使用了同一律“有A是A”。这也是与亚里士多德系统的一个重要差异。这两个系统也有相同点，即它们都是由推理规则所构成的系统。

下面我们简要地看看莱布尼茨的证明方法。

一、从Barbara推出Bocardo和Baroko。

Barbara是：

所有B是C
所有A是B
所以，所有A是C

根据反三段论律可得Bocardo:

有A不是C
所有A是B
所以，有B不是C

这里，“有A不是C”是“所有A是C”的矛盾命题，“有B不

①莱布尼茨：《人类理智新论》，陈修斋译，商务印书馆1982年版，第573页。
② 同上第二章和第十七章。

是C"是"所有B是C"的矛盾命题。

同理可得Baroko:

所有B是C

有A不是C

所以，有A不是B

这里，"有A不是B"是"所有A是B"的矛盾命题，"有A不是C"是"所有A是C"的矛盾命题。第二格和第三格的各式都可象这样从第一格推出来。

二、换位律的证明

（一）从"没有一个A是B"加上"所有B是B"得到"没有一个B是A"，这里用了第二格的Cesare。

（二）将"有A是B"作为小前提，加上"所有A是A"作为大前提，可得"有B是A"，这是第三格Datisi。

（三）将"所有A是B"作为小前提，加上"所有A是A"作为大前提，可得"有B是A"，这是第三格Darapti。

由上可见，三条换位律可从第一格和同一律"所有A是A"推出来。

三、差等律的证明

莱布尼茨认为，如果我们有一个全称肯定判断，而且它又是真实的，那么这便意味着我们也有一个特称肯定判断。同样，从E可得O。他提出可以用证明换位的方法来证明差等律。

根据莱布尼茨的论述，从"所有A是C"加上"有A是A"可得"有A是C"，这是第一格的Darii。同理可证EO差等律。

此外，莱布还谈到了前提交换律。

由上可见，莱布尼茨所构造的三段论系统与亚里士多德系统的最大不同点是，他引进了两条同一律"所有A是A"和"有A是A"，由此证明了换位律和差等律。

在逻辑史上，莱布尼茨第一次对三段论系统作出了一个算术解释。这是他于1679年发现的。算术解释的基本思想是；词项

变元与互素自然数的序偶之间建立对应关系。例如，对于变元 a 对应着两个互素的数 a_1 与 a_2；对于变元 b，对应着两个其它的互素数 b_1 与 b_2。“所有 a 是 b”是真的，当且仅当 a_1 可被 b_1 整除，并且 a_2 可被 b_2 整除。如果这些条件之一没有被满足，“所有 a 是 b”就是假的，即“并非所有 a 是 b”是真的。“有 a 是 b”是真的，当且仅当 a_1 与 b_2 之间没有公因数，并且 a_2 与 b_1 之间没有公因数。如果这些条件之一没有被满足“有 a 是 b”就是假的，从而“并非有 a 是 b”是真的。①根据这个算术解释，亚里士多德的三段论系统是正确的，从有效式可得有效式，无效式不合解释，从而被排除。

当代著名学者卢卡西维茨（Łukasiewicz，1878—1956）用数理逻辑的工具，构造了亚里士多德三段论的一个蕴涵式公理系统。这个系统有4条公理：

一、A_{aa}

二、I_{aa}

三、$CKA_{bc}A_{ab}A_{ac}$ (Barbara)

四、$CKA_{bc}I_{ba}I_{ac}$ (Datisi)

一和二就是两条同一律，卢卡西维茨把A和I解释为二元函子，三和四用的前置式记法，改成中置式记法就是（“C”表示蕴涵，“K”是合取）：

三、$A_{bc} \wedge A_{ab} \rightarrow A_{ac}$

四、$A_{bc} \wedge I_{ba} \rightarrow I_{ac}$

卢卡西维茨在证明判定问题时引入了排斥规则：

* 59. $CKA_{cb}A_{ab}I_{ac}$（即 $A_{cb} \wedge A_{ab} \rightarrow I_{ac}$ 是无效的）。

RS. $*C_{\alpha\gamma}$, $*C_{\beta\gamma}$ → $*C_{\alpha}C_{\beta\gamma}$（如果α和 β 都是简单否定表达式并且γ是一个初等表达式，那么 $C_{\alpha\gamma}$ 与 $C_{\beta\gamma}$ 都被排斥，则 $C_{\alpha}C_{\beta\gamma}$ 必定也被排斥）。

①见卢卡西维茨：《亚里士多德的三段论》，李真和李先焜译，商务印书馆1981年版，第158页。

以上这些是卢卡西维茨的系统的一些主要组成部分。我们可以把卢卡西维茨所构成的系统与莱布尼茨所构造的系统对照一下，不难看出，这两个系统有相似之处；莱布尼茨把两条同一律作为基本原理，卢卡西维茨把它们作为公理，因此他们在证明换位律和差等律时是类似的；Barbara 在两个系统中都是初始命题。当然它们也有不同之处：最大的不同是，卢卡西维茨的系统是蕴涵式公理系统，莱布尼茨的系统是推理规则式的系统；另一个不同是，莱布尼茨没有采用第三格的 Datisi 作为初始命题。但总的说来，这两个系统是十分相似的。

令人惊异的是，莱布尼茨的算术解释完全满足卢卡西维茨的系统。正如卢卡西维茨所说：“他的解释满足我们的断定的公理1—4、排斥的公理*59，以及斯卢派斯基规则等等，好像仅仅是一种巧合。无论如何，在他的研究中他的哲学直观指导着他产生了一个如此圆满的结果，的确是一桩奇事。”①

下面我们看看莱布尼茨的算术解释是怎样满足卢卡西维茨的系统的。②

公理一 A_{aa} 是被确证的，因为每一个数可由它自己整除。

公理二 I_{aa} 是被确证的，因为已经假定，对应于 a 的两个数 a_1 与 a_2 是互素的。

公理三 Barbara 式 $CKA_{bc}A_{ab}A_{ac}$ 也是被确证的，因为可整除的关系是传递的。

公理四 Datisi 式 $CKA_{bc}I_{ba}I_{ac}$ 也是被确证的，因为如果 b_1 可被 c_1 整除，b_2 可被 c_2 整除（A_{bc} 真的条件），b_1 与 a_2 之间没有公因数，并且 b_2 与 a_1 之间没有公因数（I_{ba} 真的条件），那么 a_1 与 c_2 之间必定没有公因数，并且 a_2 与 c_1 之间必定没有公因数：因为如果 a_1 与 c_2 有一个比 1 大的公因子，a_1 与 b_2 也将有这个相同的公因子，因 b_2 包含 c_2；这与 a_1 与 b_2 之间没

①《亚里士多德的三段论》，第158页。
②同上，第158—161页。

有公因数的假定相矛盾。同理可证，a_2 与 c_1 之间必定没有公因数。

卢卡西维茨在证明*59 $CKA_{cb}A_{ab}I_{ac}$ 被排斥时，举以下数字为例：

$a_1=15$， $b_1=3$， $c_1=12$，

$a_2=14$， $b_2=7$， $c_2=35$。

A_{cb} 是真的，因为 c 被 b_1 整除，并且 c 可被 b_2 整除；A_{ab} 也是真的，因为 a_1 可被 b_1 整除，并且 a 可被 b_2 整除；但结论 I_{ac} 不是真的，因为 a_1 与 c_2 不是互素的。

RS（斯卢派斯基排斥规则）的证明比较复杂，这里从略，有兴趣的读者请参看卢卡西维茨的著作。

综上所说，莱布尼茨的算术解释就是卢卡西维茨所构造的亚里士多德三段论系统的语义模型。莱布尼茨的这种逻辑技巧是他的整个数理逻辑思想的一部分，他实际上提出了形式语言的语义学的思想。

第二节 莱布尼茨创建数理逻辑的指导思想

莱布尼茨创建数理逻辑的指导思想有两点。

一、理性演算

莱布尼茨继承了思维可以计算的思想，提出了建立理性演算的设想，他把这种理性演算也称为"通用代数"，"一般数理"，"逻辑斯蒂"，或"数理逻辑"。这就是莱布尼茨所要建立的新逻辑。他认为，演算就是用符号作运算，在数量方面，在思维方面都起作用。他说："确实存在着某种演算同普通习惯的演算完全不同，在这里符号不代表量，也不代表数（确定的和不确定的），而完全是其他一些东西，例如点、性质、关系。"①他提出，在这样的演算中，一切推理

①转引自肖尔兹：《简明逻辑史》第100页。

的正确性将化归于计算，除了事实的错误之外，所有错误将只由于计算失误而来。莱布尼茨要求演算能使人们的推理不依赖于对推理过程中的命题的含义内容的思考，这就是说，要把一般推理的规则改变为演算规则。肖尔兹在评述莱布尼茨的这一设想时深刻地指出：“我们必须把这种对演算规则的真正作用的见解，看做是莱布尼茨的最伟大的发现之一，并看做是一般人类精神的最精彩发现之一。”①

莱布尼茨想象到一个新时代即将来临，在这个时代，根据新逻辑，一切问题包括哲学问题将用“理性演算”来解决。他说：“我们要造成这样的一个结果，使所有推理的错误都只成为计算的错误，这样，当争论发生的时候，两个哲学家同两个计算家一样，用不着辩论，只要把笔拿在手里，并且在算盘面前坐下，两个人面面相觑地说：让我们来计算一下吧！”②

二、普遍语言

为了能获得理性演算，我们必须用一种人工语言代替自然语言。莱布尼茨把这种人工语言叫做“普遍语言”，这种语言的符号是表意的而不是拼音的，每一符号表达一个概念，如同数学的符号一样。他有时说这种普遍语言好象是代数，有时他又说它是中国表意文学系统的改进说法。可见，中国表意文字的特点对莱布尼茨提出“普遍语言”起了重要的推动作用。

莱布尼茨说：“关于符号的科学是这样的一种科学，它能这样地形成和排列符号，使得它们能够表达一些思想，或者说使得它们之间具有和这些思想之间的关系相同的关系。一个表达式是一些符号的组合，这些符号能表象被表示的事物。表达式的规律如下：如果被表示的那个事物的观念是由一些事物的一些观念组成的，

---

①《简明逻辑史》，第51页。
②转引自《简明逻辑史》，第185页，又见HFL，P. 275,

那么那个事物的表达式也是由这些事物的符号组成的。”①

肖尔兹把莱布尼茨的这段话解释成对普遍语言的三条要求：

“ 1) 在系统的符号（就它们不是空位的符号而言）和所思考（在这个字的最可能广的意义下）的东西之间，必有一种一一对应的关系。这就是说，对每一个所思考的东西而言，必有一个而且仅仅有一个符号（即所思考的东西的‘映象’）反之亦然,对每一个符号必有一个而且仅仅有一个所思考的东西，我们把它叫做符号的‘意义’。

2）符号必须这样地创造出来：如果所思考的东西可以分解为组成部分，那么这些组成部分的‘映象’必须是所思考的东西的映象（就是用系统中的符号构成的）的组成部分。

3）附属于这些符号的运算规则的系统必须这样地创造出来，使得无论在何处，如果所思考的东西T_1对所思考的东西T_2有前件和后件的关系，那么T_2的‘映象，可以解释为T_1的‘映象，的后件。”②

从莱布尼茨对普遍语言的这三条要求可以看出，他为形式语言的语形学（语法学）开了先河。

莱布尼茨关于建立数理逻辑的两点设想恰恰抓住了数理逻辑的本质，这两点也正是数理逻辑的特点。

第三节　莱布尼茨具体构造的演算

莱布尼茨虽然提出了建立数理逻辑的两点宏伟纲领，但他本人对他的计划未曾完成，他没有留下一个完成了的逻辑系统。莱布尼茨对逻辑演算仅做了几次尝试，他提出的演算是一种关于包含和被包含的演算，这种演算的特点是，不根据事物的次序，也不根据事物的重复，主要原理是 AB=BA 和 AA=A。

① 转引自《简明逻辑史》第52页。

②《简明逻辑史》第52页。

他在《普遍演算样本》及其《附录》中提出了以下的演算片断：

“以下命题自然是真的：(1) A是A；　(2) AB是A；　(3) A不是非A；　(4) 非A不是A；　(5) 凡不是A的就是非A；　(6) 凡不是非A的就是A。

以下推论自然是真的：A是B并且B是C，所以A是C。

演算规则如下：(1) 凡包含在某些未定字母中的东西要了解为以服从同样条件的任何其他东西为其结论，例如，因为AB是A是真的，所以BC是B也将是真的。(2) 在同样的项中，字母的调换没有差别，即AB等值于BA。(3) 在同样的项中同一字母的重复是无用的，例如在B是AA中。(4) 一个命题可以从任意多的命题通过把所有主项结合为一个主项、把所有谓项结合为一个谓项而得到，即从A是B和C是D和E是F，我们可以得到ACE是BDF。(5) 从任何一个其谓项是由一些项合成的命题可能得到一些命题，这些命题中的每一个与原命题有同样的主项，但其谓项是原命题谓项的一部分，即给定A是BCD，我们有A是B、A是C和A是D。”①

莱布尼茨为了发展他所构造的演算，对亚里士多德的四种直言命题提出了两个解释方案：

类　型	第一方案	第二方案
每一A是B	A非一B是不存在的	AB=A
有A不是B	A非一B是存在的	AB≠A
无A是B	AB是不存在的AB	≠ AB存在
有A是B		AB是存在的AB=AB存在

对四种直言命题可作外延的解释，也可作内涵的解释，莱布尼茨倾向于内涵解释。A、B可解释为类，也可解释为属性。如果解释为类，那么莱布尼茨的方案就是布尔的代数解释的先导。莱

①《莱布尼茨的哲学着作》，第7卷，第224页。转引自《逻辑学的发展》第435一436页。

布尼茨的内涵解释是有问题的，他把"有A是B"解释成对A、B两种特性的相容性所作的断定，把"存在"当成包含在所有其他词项当中的一个词项。本来，A、B是一阶特性，"存在"是应用于一阶特性的二阶特性，但在"AB=AB存在"中，二阶特性与一阶特性结合在等式右边，成为一项。这种把不同阶的特性合而为一的做法是完全错误的。

莱布尼茨所做的最好的演算是实加法演算，这是关于概念之间相结合的一种演算，也就是关于概念之间包含和被包含的演算。我们将它介绍于下。①

定义1。词项是同一的或一致的，就是说它们能在随便什么地方，以一个代之以另一个而不改变任何命题的真值。A＝B表示A和B是同一的。定义1就是后人所称呼的莱布尼茨定律，或不可分辨的东西的同一性原理。

定义2。词项不是同一的，就是说不能总是以一个代之以另一个的词项，是不同的。$A \neq B$表示A和B是不同的。

命题1。如果A=B，则B=A。因为A=B（据假设），由此可得（据定义1）在命题A＝B（据假设是真的）中B能代A，A能代B；所以B=A。

命题2。如果$A \neq B$，则$B \neq A$。否则我们将有B=A，因此（据前一命题）A＝B，这与假设矛盾。

命题3。如果A=B和B＝C，则A=C。因为如果在命题A=B（据假设是真的）中以C代B（据定义1，因为B＝C），那么所得的命题就是真的。

命题4。如果A＝B和$B \neq C$，则$A \neq C$。因为如果在命题$B \neq C$（据假设是真的）中用A代B，那么我们就有（据定义1，因为A=B）真命题$A \neq C$。

定义3。A在L中，或L包含A，与以下说法是同样的：L

①参看C. I · Lewis: Survey of Symbolic Logic, Berkeley. 1918, p. 379;《逻辑学的发展》第438—441页。

的组成是与许多词项的总体（ A是其中之一）一致的。$B \oplus N = L$表示B在L中，B和N一起构成L。这对较多的词项同样成立。

这里"$\oplus$"是与算术加法不同的实加法符号。

公理1。$B \oplus N = N \oplus B$。

公设。许多词项，如A和B，可以加起来组成单个词项$A \oplus B$。

公理2。$A \oplus A = A$。公理2表明$\oplus$与算术加根本不同。

命题5。如果A在B中并且A＝C，则C在B中。因为在命题"A在B中"（据假设是真的）以C代A（据定义1，因为据假设A=C）得到C在B中。

命题6。如果C在B中并且A＝B，则C在A中。因为在命题"C在B中"以A代B（因为A=B）得到C在A中。

命题7。A在A中。因为A在$A \oplus A$中（据定义3），所以（据命题6）A在A中。

命题7表明，"在……中"（包含于）是一般的包含于关系，而不是真包含于关系。命题17也是如此。

命题8。如果A=B，则A在B中。因为（据前一命题）A在A中，即（据假设）A在B中。

命题9。如果A=B，则$A \oplus C = B \oplus C$。因为如果在$A \oplus C = A \oplus C$（自然是真的）中，于一个地方以B代A，那么我们就有$A \oplus C = B \oplus C$。（这个命题的逆不成立）

命题10。如果A=L和B=M，则$A \oplus B = L \oplus M$。因为B＝M，所以$A \oplus B = A \oplus M$（据前一命题）；再以L代第二个A（因为据假设，A＝L），我们就有$A \oplus B = L \oplus M$。（这个命题的逆不成立）

为节省篇幅，以下定理的证明从略。

命题11。如果A=L、B=M和C=N，则$A \oplus B \oplus C = L \oplus M \oplus N$。如此等等。（逆命题不成立）

命题12。如果B在L中，则A⊕B在A⊕I中。（逆命题不成立）

命题13。如果L⊕B=L，则B在L中。

命题14。如果B在L中，则L⊕B=L。

命题15。如果A在B中和B在C中，则A在C中。（逆命题不成立）

系。如果A⊕N在B中，则N在B中。

命题16。如果A在B中、B在C中和C在D中，则A在D中。如此等等。（逆命题不成立）

命题17。如果A在B中并且B在A中，则A B。

命题18。如果A在L中并且B在L中，则A⊕B在L中。（逆命题不成立）

命题19。如果A在L中、B在L中和C在L中，则A⊕B⊕C在L中。（逆命题不成立）

命题20。如果A在M中和B在N中，则A⊕B在M⊕N中。（逆命题不成立）

命题21。如果A在M中、B在N中和C在P中，则A⊕B⊕C在M⊕N⊕P中。如此等等。（逆命题不成立）

莱布尼茨对定义3和公理1、2作了两个注释，这两个注释的大意是说，他的演算是抽象的，A、B等符号可作不同解释。当A、B等被解释为属性时，⊕代表合取；当A、B等被解释为类时，⊕代表析取。“在……中”（包含于）可用同样方式加以解释，一个属性包含于另一个属性，就是说由后者推出前者；一个类包含于另一个类，就是说前者是后者的一个子类。

由上可见，莱布尼茨的演算具有形式系统的初步特点，可作不同的解释。这正是逻辑演算的特征。虽然莱布尼茨的演算所包括的东西不多，它除了包括Barbara（命题15）之外没有包括三段论的其它原理，但是，莱布尼茨演算的形式化特点在逻辑演算发展史上的开创性功绩是不可磨灭的。

值得注意的是，莱布尼茨于1669年在数理逻辑史上第一次确定了三值逻辑的表，其中用0表示不可能，用1/2表示偶然，用1表示必然。因此，莱布尼茨是三值逻辑创始人卢卡西维茨的前驱。①

①参看《简明逻辑史》第89页。

第七章　逻辑代数

第一节　逻辑代数建立前的逻辑发展

在莱布尼茨之后，数理逻辑的研究成果不多，重要原因是传统逻辑的影响很大，另一方面是对变元作内涵解释遇到很大困难，阻碍了对逻辑进行形式的研究。当然，在莱布尼茨之后，逻辑的形式化也取得一些进展。

17世纪末和18世纪，一些数学家对逻辑作了三个方面的研究。

著名意大利数学家、非欧几何的前驱萨克里（Geronimo Saccheri，1667—1733）提出把几何的严格标准应用于逻辑。这是第一个研究方向。萨克里在1697年出版了《几何证明》的小册子。他在书中对于亚里士多德在排斥无效的三段论式时使用反例的方法十分不满，因而提出了他自己的排斥方法。这种方法曾由欧几里德使用过。这是一种特殊的反证法：把命题的矛盾看成是被证明的，由此用直接证明得出所需要的结果。萨克里举了一个例子说明他的方法。为了证明第一格AEE式的无效性，萨克里构造了以下论证：

一、每一个由全称大前提和肯定小前提组成的三段论式是第一格的有效式，

二、AEE式没有全称大前提和肯定小前提，

三、所以，AEE式不是第一格的有效式。

这个论证本身就是AEE式，两个前提显然是真的。如果AEE式是第一格的有效式，那么结论就一定是真的。但是结论是

说，AEE式不是第一格的有效式，与假定矛盾。所以，必须否定假定，即结论一定是真的。这里，结论是从自己的否定得出来的，这就表明结论必真。

18世纪的另一个逻辑研究方向是用图解法来处理命题及其推理。早在16世纪，人们就已经应用几何图解来表示直言命题，后来莱布尼茨使用了一些线条包含在另一些线条中的图形来表示直言命题和三段论。瑞士数学家兰贝特（J. H. Lambert，1728—1777）和德国哲学家普楼凯（G. Ploucquet，1716—1790）也使用过图解法。使用图解法影响最大的是瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707—1783），他的图解法就是现今逻辑教科书中所说的欧拉圈。欧拉圈用几何的方法把莱布尼茨的线条方法通俗化了，并注重外延解释，这对数理逻辑的发展起了一定的作用。

18世纪逻辑的最主要成果是兰贝特和普楼凯为逻辑演算做了一些工作。①

兰贝特用开始的小写字母a, b, c, d…表示已知的概念，用中间小写字母n，m，l，…表示非确定的概念，用后面的小写字母x，y，z，…表示未知的概念。他引进了四种运算，即逻辑的加、减、乘、除，用符号＋，-，×，÷来表示。a＋b被解释为排斥共同部分的并类或不相容析取。a-b也被写成a/b，表示"a而非b"。a×b表示交类或合取，简写为ab。÷是×的逆运算。兰贝特提出了以下一些公式：

一、a=ax＋a/x。

二、a＋b=a/b＋b／a+ab＋ba。

三、a＋x/a=x＋a／x。

四、a+a/b=ab。

五、xx=x。

兰贝特除了提出类演算的一些公式外，还提出了谓词量化的

① 参看HML，pp. 93—127,

方案。例如，全称肯定命题“每一A是B”被表示成两种形式：A=B和A>B（从内涵说，>表示B是A的一个特征，B包含于A）。他企图把“有些A是有些B”中的“有些A”看成是表达了A特性的一个子类。每一A是B'也被表示为A = mB，m代表非确定的特性，Barbara表示成：

B=mA

C=l B

∴ C=l mA

此外，兰贝特还提出了关系幂的概念，如果x对y有R关系，y对z有R关系，那么x对z有R^2关系。这是关系逻辑中的一个很重要的概念。

普楼凯也建立了一种演算，他用大写字母代表周延的词项，用小写字母代表不周延的词项，有两个二元关系符号，一个是est（等同），另一个是>，>形式等价于后来的舍弗竖，a>b相当于a | b，即¬（a∧b)（并非a且b）。普楼凯提出了两种运算，+被解释为合取或交运算，乘号（一般省略掉）代表相容析取或不排除共同部分的并运算。他提出了以下几条原理：

一、从前提ab > c>deb可得abde > c。用现代符号，这个推理就是：

从（a∨b) | c和（d∨e∨b) | c

推出：

(a∨b∨d∨e) | c。

二、如果（a∨b∨c) | (d∨e）是真的，则a | d, a | e, b | d, b | e, c | d, c | e等关系也是真的。

三、(a∨b)∧(c∨d)蕴涵(a∨b)∨(c∨d)。这就是说，A并且B蕴涵A或B。

四、从（A=b)∧(C | D)∧A= c推出(A=b=c) | D(c包含于C)。

前三条与命题演算有关，第四条与类演算有关。此外，他还提

出了其它的一些命题演算和类演算的原理。他在演算过程中，实际上使用了 $a \wedge a=a$ 和 $a \vee a=a$ 等原理。

令人感兴趣的是，普楼凯也提倡谓词的量化，他认为“所有”和“有的”这类量词不仅要与主词相结合，而且也要与谓词相结合。

到了十九世纪上半期，数理逻辑的研究有所进展。法国数学家吉尔哥恩 J. D. Gergonne, 1771—1859)对类代数的建立作了有益的贡献。他考察了类之间的五种关系：

一、aIb，表示 a 与 b 同一。

二、aCb，表示 a 真包含于 b。

三、$a\supset b$，表示 a 真包含 b。

四、aXb，表示 a 与 b 交叉。

五、aHb，表示 a 与 b 相排斥。

吉尔哥恩预设 $a \neq 0) \wedge (b \neq 0)$，全称肯定命题 aAb 表示为 $a \leq b$，它等值于：

$(a=b) \vee ((a \leq b) \wedge (b \neq a))$。

aIb 表示为 $ab \neq 0$，等值于：

$(a \leq b) \vee (b \leq a) \vee ((ab \neq 0) \wedge \neg(a \leq b) \wedge \neg(b \leq a))$。

aOb 表示为 $a\bar{b} \neq 0$。（a 而非 b 不等于零），等值于：

$(a \leq b) \vee (b \leq \bar{a}) \vee ((a\bar{b} \neq 0) \wedge \neg(a \leq \bar{b}) \wedge \neg(b \leq a))$。

aEb 表示为：$ab=0$。

我们可将以上类的表示法用五种关系的记号表示为：

所有 a 是 b　　aIb 或 aCb。

没有 a 是 b　　aHb。

有 a 是 b　　aXb 或 aIb 或 aCb 或 $a\supset b$。

有 a 不是 b　　aHb 或 aXb 或 $a\supset b$。

吉尔哥恩用这些关系对亚里士多德的三段论作了处理，但他没有使其公理化。

19世纪上半期，一些逻辑学家在改进传统逻辑的过程中提出了有名的“谓词量化”学说。上文说过，兰贝特和普楼凯是这个学

说的前驱。英国植物学家边沁(G. Bentham, 1800—1884)在1827年比较系统地提出了这一学说。他提出了以下8种命题：

一、tX=pY;"t"表示全部,"p"表示部分;"="表示同一("是")。

二、tX∥pY;"∥"表示"不是"。

三、tX=tY。

四、tX∥tY。

五、pX=pY。

六、pX∥pY。

七、pX=tY。

八、pX∥tY。

爱丁堡的威廉·汉密尔顿(W. Hamilton, 1788—1856)发展了边沁的学说。他象边沁一样，提出了8种直言命题：

一、所有X是有些Y。

二、任何X不是有些Y。

三、所有X是所有Y。

四、任何X不是任何Y。

五、有些X是有些Y。

六、有些X不是有些Y。

七、有些X是所有Y。

八、有些X不是任何Y。

这里，汉密尔顿把"有些"理解为"有但不是全部"。

根据8种命题，换位只有简单换位，不再有限制换位。这样，三段论式可以不分四个格而作统一处理，有效式数目增加，8种命题可写成等式或不等式，推导十分简便。例如，我们可用边沁的记法，写出以下一些三段论式：

一、	二、
tM=tp	tp=tM
pS∥M	tS=tM
∴ PS∥tP	∴ tS=tP

一式按传统说法是第一格，二式是第二格，但实际上这里格的区分已没有意义，根据“等量代等量”的原理即可得出结论。

汉密尔顿的“谓词量化”方案，由于不合普通语言习惯，因而未能流行。但他对古典逻辑所做的改革尝试，对逻辑代数的建立起了一定的作用。这里我们顺便提一下德国数学家格拉斯曼(Grass-mann) 1844年的《外延演算》一书,此书不使用座标来处理几何结构，提出了逻辑代数的一些原理。

在数理逻辑初创时期，对逻辑代数的建立起重大作用的因素是当时代数学的飞速发展。当时，数概念得到空前的扩充，数系得到扩大，从自然数扩大到有正负号整数，有理数，实数，复数等。这些不同类型的数与自然数都有一些相似的性质，都遵守交换律、结合律和分配律。这些基本定律又是不确定的，也就是说，它们的形式是抽象的，它们满足各种类型的数的条件是要依赖各类型数的加法和乘法的定义，在自然数中适用的加法和乘法的定义不能在有正负号整数的加法和乘法中加以应用。英国一些著名数学家，如皮考克(G. Peacock)，格里高里(G. F. Gregory)，德摩根(De Morgan）和都柏林的威廉·罗万·汉密尔顿(W. R. Ha-milton）等，对代数的抽象性质作了进一步研究。1844年，威廉罗万·汉密尔顿发表了第一篇论四元数的文章，之后他致力于建立一种新的结合代数。令人奇怪的是，他的系统不满足代数的一切基本规则，为要保存其它规则必须放弃乘法交换律。当时，他的四元数没有被人们承认是数。

19世纪代数学的结果表明：可能建立一种代数，这种代数中的元素不是通常意义上的数；这种代数也不一定全都遵守普通的规律。这些结果证实了莱布尼茨的预见：“并非所有的表达式都是关于量的，人们能够想出无穷的演算方式来。”①

①转引自《简明逻辑史》第100页。

第二节　布尔的逻辑代数

上一节我们论述了自莱布尼茨以来逻辑研究的重要成果以及代数学的形式化抽象化的发展，这一切为数理逻辑发展史上的第一个比较成熟的逻辑演算——逻辑代数奠定了基础。

逻辑代数是同布尔的名字联系在一起的，现今称为布尔代数。乔治·布尔(G. Boole, 1815—1864)是19世纪的英国数学家和逻辑学家。生于英格兰的林肯，卒于爱尔兰的考克。他上过小学和短时间的商业学校，但主要以自学取得成就而著称于世。他在少年时代就出现了用代数公式表达逻辑关系的想法。爱丁堡的汉密尔顿同德摩根曾发生一场争论，汉密尔顿责难德摩根剽窃他的谓词量化学说。这一争论引起了布尔对逻辑的兴趣。他曾读过当时英国数学家皮考克、格里高里、德摩根和威廉·罗万·汉密尔顿的一些文章。格里高里是《剑桥数学杂志》编辑，是布尔的好友，十分赞赏布尔的数学才能。1844年，布尔发表著名论文《关于分析中的一个普遍方法》，并因此获皇家学会的奖章。1849年任考克皇后学院教授。1857年被选为英国皇家学会会员。主要逻辑著作有：《逻辑的数学分析》(1847)，《思维规律的研究》(1854）和《逻辑与概率研究》(手稿汇编,由里斯[R. Rhees]编辑,1952年在伦敦出版）。

布尔认为，逻辑关系与某些数学运算很相似，代数系统可以有不同解释，把解释推广到逻辑领域，就可以构成一种思维演算。他在《逻辑的数学分析》的开头写道：

“熟悉符号代数理论现状的人们都知道，分析过程的有效性不依赖于对被使用符号所做的解释，而只依赖于它们的组合规律。对所假定的关系的真假没有影响的每一个解释系统，都是同样可允许的，这样一来，同一个过程在一种解释方式之下可以表示关于数的性质问题的解法，在另一种解释方式之下，表示几何问题的

解法，而在第三种解释方式之下，则表示力学或光学问题的解法。……我们可以正当地规定一个真演算的下述确定性质，即它是一种依赖于使用符号的方法，它的组合规律是已知的和一般的，它的结果就是承认一致性的解释。对分析的现有形式规定一种量的解释是那些形式由以被决定的情况造成的结果，而不是分析的普遍条件。就是在这种一般原理的基础上，我的目的是要建立逻辑演算，我要为它在众所公认的数学分析的形式中取得一个位置，而不去考虑它目前在目的和手段方面是否一定是无与伦比的。”①

下面我们根据布尔的《逻辑的数学分析》和《思维规律的研究》来论述布尔代数的主要内容。

一、逻辑代数的基本原理及类的解释

布尔对他的代数作了三种解释，最主要的是类解释。他使用大写字母X，Y，Z表示类和类的个别分子，比如说，类X的分子是所有X。小写字母x，y，表示从某个范围选择所有X，所有Y，所有Z的结果，称为选择符号，实际上就是类X，Y和Z的符号。基本运算有：

（一）加，用符号十表示。x+y的意思是表示一个类，其分子或属于x所表示的类或属于y所表示的类，但x所表示的类和y所表示的类是相互排斥的。以下为方便起见，我们将x所表示的类’简单说成‘x类，”等等。“+”相当于无共同部分的并运算和不相容析取。

（二）乘，用符号·表示，也可省去。xy的意思是其分子既属于x类又属于y类的事物类，“·”相当于交运算和合取。

（三）补，这个运算是相对于全类1而言的。所谓全类就是每一事物都是其分子的类，与其相对的是空类，用0表示，即没有事物是其分子的类。x相对于1的补用1-x表示，意为x的补

① G Boole, The Mathematical Analysis of Logic, Oxford, 1951, pp. 3-4。

就是其分子属于全类但不属于x的事物类。布尔利用补运算定义了减法：

$$x-y=_{df}x(1-y)$$

布尔代数中的基本关系是相等关系，用=表示。布尔提出了以下基本原理：

（一） $xy=yx$,

（二） $x+y=y+x$,

（三） $x(y+z)=xy+xz$,

（四） $x(y-z)=xy-xz$,

（五） 如果$x=y$,则$xz=yz$,

（六） 如果$x=y$,则$x+z=y+z$，

（七） 如果$x=y$,则$x-z=y-z$，

（八） $x(1-x)=0$,

（九） $x=x$或$x^2=x$，一般$x^n=x$。

前七个公式相似于普通数字代数的规则，第八和第九个公式是逻辑代数特有的。布尔有时从第九个公式$x^2=x$（他称之为指数律）推出第八个公式$x(1-x)=0$（矛盾律）：

$$x^2=x,$$

$$\therefore\ x-x^2=0,$$

$$\therefore\ x(1-x)=0。$$

以上代数系统是类解释的系统，但这一系统并未假定任何一个类必须取全类或空类为值，所以它并不是二值系统，但是布尔对这个系统作了二值解释，他加上了一条限制：x，y等仅取1或0为值,公式(一)至(九)对这种数字解释成立,也就是说,他增加了：

（十） $x=1$或$x=0$

这时,他的代数变为二值代数系统,但包括公式(十)的系统不允许作类解释。布尔并没有明确区分这两个系统。

二、布尔对古典形式逻辑的处理

布尔在构造了逻辑代数系统之后，接着用它来处理古典形式逻辑的直言命题及其推理。

所有X是Y表示为 $x(1-y)=0$ … A

无X是Y $xy=0$ … E

有X是Y $xy=v$ … I

有X不是Y $x(1-y)=v$ … O

“v”是含有一些数目不固定的分子的类。

E命题和I命题可以简单换位，“E和I相对于x和y是对称的，所以x变为y，y变为x，等式仍然不变。因此E和I可以解释为：

无Y是X，

有Y是X。”①

全称肯定命题A可写成以下等式：

$$(1-y)x=0。$$

布尔说，此式的解为$x=vy$，因为将这个值代入上述等式中，等式不依赖于v而成立：

$$(1-y)vy=0。$$

$x=vy$可解释成“有Y是X”。这也就是说，A命题可以限制换位。

E命题的表达式$xy=0$可以写成：

$$x[1-(1-y)]=0,$$

这个等式可以解释为A命题：

所有X是非一Y。

同样，A命题的表达式$x(1-y)=0$可解释成：

无X是非一Y。

① The Mathematical Analysts of Logic, p. 26. 以下引证此书，缩写为MAL．

以上就是A、E命题的换质。I和O命题的换质如下：

有X是Y…… $v=xy$

有X不是非一Y…… $v=x\{1-(1-y)\}$

有X不是Y…… $v=x(1-y)$

有X是非一Y...... $v=x(1-y)$

布尔对差等律的表述如下：

"假定全称命题

所有X是Y..... $x(1-y)=0$

无X是Y…… $xy=0$

用v相乘，我们得到

$$vx(1-y)=0$$

$$vxy=0，$$

它们可解释为

有X是Y...... 1,

有X不是Y…… O。"①

由布尔对差等律的表述可以看出，布尔象亚里士多德一样，预设了主词存在。传统的亚里士多德三段论式可用逻辑代数来处理。下面我们简略介绍布尔的方法。布尔分四种情况讨论。

第一类：在表达式中无v。第一格AA，EA；第二格AE,EA；第四格AA，AE可得结论。

例如，第一格AA，交换前提即是第四格AA:

所有Y是X $y(1-x)=0$ 或 $(1-x)y=0$

所有Z是Y $z(1-y)=0$ $zy-z=0$

由于在第一个等式中有y，在第二个等式中有 $(1-y)$，正好是矛盾的，将两个等式相乘即可消去y，得到：

$$z(1-x)=0，$$

即所有Z是X。

① MAL，p．29.

这是布尔处理全称式的‘消去”方法。

第二类：v由一个等式的解引进。第一格AE；第三格AA, AE，EA；第四格EA可直接地或间接地得结论。所谓间接就是要经过前提交换或前提中的换位，例如第一格AE可用第四格EA或第一格EI得结论：

所有Y是X　　$y(1-x)=0$　　$y=vx$

无Z是Y　　$zy=0$　　$0=zy$

$0=vzx$

即有X不是Z

这里“所有Y是X”被表示为$y=vx$，“有X不是Z”被表示为$vzx=0$。第一格AE实际上用第四格EA得结论。

第三类：v在一个等式中，但不是由解所引进。第一格AI, EI；第二格AO，EI，OA，IE；第三格AI, AO, EI, EO, IA, IE, OA, OE；第四格IA, IE，可以直接地或间接地得出结论。

例如第一格AI，交换前提即是第四格IA:

所有Y是X　　$y(1-x)=0$

有Z是Y　　$vz=y$

$vz(1-x)=0$

即有Z是X

这里“有Z是Y”被表示为$vz=vy$,“有Z是X”被表示为$vz(1-x)=0$。

第四类情况是，v在两个等式中都出现，不能得结论。

布尔在处理三段论式的过程中，对直言命题又给出了如下的表达式：

$y=vx$	或	$y-vx=0$…	所有Y是X
$y=v(1-x)$		$y+vx-v=0$…	无Y是X
$vy=vx$		$vy-vx=0$ …	有Y是X
$vy=v(1-x)$		$vy+vx-v=0$…	有Y不是X

三、逻辑函项及其运算

布尔除了用逻辑代数成功地处理了古典逻辑外，还从形式方面对逻辑代数作了研究。

他没有给逻辑函项下定义，只是说 $f(x), f(x,y)$ 等中的符号 x, y 可看成是逻辑符号，只取 0 和 1 为值，对适当的系数 a 和 b，$f(x)=ax+b(1-x)$。假定 x 取值 1 和 0，a 和 b 的值就可确定，经代入得到：

$$f(1)=a\cdot 1+b(1-1)=a,$$

$$f(0)=a\cdot 0+b(1-0)=b。$$

由此可得到等式：

$$f(x)=f(1)x+f(0)\cdot(1-x),$$

它称为函项 $f(x)$ 关于 x 的展开式。

当 $f(x)=0$，布尔用下法消去 x：

$$f(1)x+f(0)(1-x)=0,$$

$$f(1)x+f(0)-f(0)x=0,$$

$$(f(1)-f(0))x+f(0)=0,$$

$$\therefore\quad x=\frac{f(0)}{f(0)-f(1)} \quad (1),$$

$$\therefore\quad 1-x=1-\frac{f(0)}{f(0)-f(1)}=-\frac{f(1)}{f(0)-f(1)} \quad (2),$$

(1) (2) 相乘得到

$$x(1-x)=\frac{f(0)}{f(0)-f(1)}\left(-\frac{f(1)}{f(0)-f(1)}\right)$$

$$=-\frac{f(0)f(1)}{f(0)-f(1)}$$

$$\because\quad x(1-x)=0,$$

$$\therefore\quad -\frac{f(0)f(1)}{f(0)-f(1)}=0,$$

即 $f(0)f(1)=0$。

布尔把以上的"消去规则"表述为："如果$f(x)=0$是一个包含类符号x的逻辑等式，带有或不带有其它的类符号，那么等式$f(1)f(0)=0$不依赖于x的解释将是真的；它是从以上等式中消去x的完全结果。换句话说，从任一给定等式$f(x)=0$中消去x是通过相继地在这个等式中变x为1和变x为0，并将两个所得的等式相乘而实现的。"①

消去规则在三段论式中有应用。例如，

所有M是P　　$m(1-p)=0$

所有S是M　　$s(1-m)=0$

两式相加得到：

$$m-mp+s-sm=0，$$

对m展开得$[f(m)=f(1)m+f(0)(1-m)]$：

$$(1-1\cdot p+s-s\cdot 1)m+(0-0\cdot p+s-s\cdot 0)(1-m)=0，$$

化简为$(1-p)m+s(1-m)=0$，

这里$f(0)=s, f(1)=(1-p)$，根据消去规则：

$$s(1-p)=0，$$

即所有S是P。

对二元函项和三元函项也有展开式。例如，假定$f(x, y)$是包含两个选择符号x、y以及普通代数记号的表达式，我们首先把它看成是x的函项：

$$f(x, y)=f(1, y)x+f(0, y)(1-x),$$

然后再把它看成是y的函项，我们就可得到：

$$f(x, y)=f(1, 1)xy+f(1, 0)x(1-y)+f(0, 1)(1-x)y+f(0, 0)(1-x)(1-y)。$$

此式就是$f(x, y)$的完全展开式。

包含三个选择符号x, y和z的展开式将有8项：xyz,

---

①Boole, An Investigation of The Laws of Thought, London, 1854 p. 101.

$xy(1-z)$，$x(1-y)z$，$x(1-y)(1-z)$，$(1-x)yz$，$(1-x)y(1-z)$，$(1-x)(1-y)z$，$(1-x)(1-y)(1-z)$。每一项带有适当系数。含三个以上选择符号的表达式可用类似的方法得到。

现在让我们来看一个应用三项展开式的例子。设有一个命题："人是有理性的动物，"令x代表人，y代表动物，z代表有理性的。上述命题可表示为：

$$x=yz\text{，或 } x-yz=0\text{。}$$

将$x-yz$展开，得到8项，其中xyz、$(1-x)y(1-z)$、$(1-x)(1-y)z$、$(1-x)(1-y)(1-z)$四项的系数分别为$f(1,1,1)$，$f(0,1,0)$，$f(0,0,1)$和$f(0,0,0)$，它们均等于0，可将这四项消去，其它四项的系数均为1，我们得到：

$$xy(1-z)+x(1-y)z+x(1-y)(1-z)+(1-x)yz=0\text{。}$$

由此可得每一项均等于0:

$xy(1-z)=0$，

$x(1-y)z=0$，

$x(1-y)(1-z)=0$，

$(1-x)yz=0$。

这就表明以下四个类是空类：

人而非理性的动物；

人而有理性的非动物；

人而非理性的非动物；

非人而有理性的动物。

四、逻辑代数的命题解释和概率解释

逻辑代数是一种可以作各种解释的抽象演算。布尔对逻辑代数除了作类的解释和二值代数的解释外，他还作了命题的和概率的解释。

布尔在《逻辑的数学分析》一书中奠定了命题演算的基础。他认为，仅仅有两种条件三段论。第一种是构造性的：

如果A是B，则C是D，

但A是B，所以C是D。

第二种是破坏性的：

如果A是B，则C是D，

但C不是D，所以A不是B。

布尔指出，这些论证的有效性不依赖A、B、C、D的解释，它们可以解释成个体或类。他把命题A是B、C是D分别用符号X和Y来表示，上述的第一个条件三段论可表示成：

如果X是真的，则Y是真的，

但X是真的，所以Y是真的。

因此，我们必须考虑的不是对象和对象类，而是命题的真值。布尔说：

“我们可在下述意义上使选择符号x、y、z适用于表示命题的符号X、Y、Z。假设的全域1，将包含一切可想象的情况和情况组合。选择符号x(属于表示这种情况的任一主词）将选出那些在其中命题X是真的，Y和Z同样是真的那些情况。如果我们限于考察一个给定的命题X，暂且不考虑其它命题，那么就只有两个情况是可想象的，即第一、给定的命题是真的，第二，它是假的。这两个情况结合起来就构成命题的全域，前者由选择符号x决定，后者由选择符号1-x决定。但是如果允许考虑其它情况，那么这些情况中的每一个将分解为其它各个范围更小的情况，它们的数目将依赖于所允许的外加考虑的情况之数目。因此，如果我们把命题X和Y结合起来，那么可想象的情况的总数可从表示在以下的图式中看出来：

	情　况	选择表达式
1	X真，Y真	xy
2	X真，Y假	$x(1-y)$

3 X假，Y真 $(1-x)y$

4 X假，Y假 $(1-x)(1-y)$

……我们要注意的是，不管那些情况有多少，表示每个可想象情况的选择表达式的数目将是唯一的。”①

如果我们考虑有三个成分的命题：X表示下雨，Y表示下冰雹，Z表示结冰，那么可能的真假组合情况以及相应的选择表达式如下：

情 况	选择表达式
1 下雨，下冰雹，结冰	xyz
2 下雨，下冰雹，不结冰	$xy(1-z)$
3 下雨，结冰，不下冰雹	$xz(1-y)$
4 结冰，下冰雹，不下雨	$yz(1-x)$
5 下雨，不下冰雹，不结冰	$x(1-y)(1-z)$
6 下冰雹，不下雨，不结冰	$y(1-x)(1-z)$
7 结冰，不下冰雹，不下雨	$z(1-x)(1-y)$
8 不下雨，不下冰雹，不结冰	$(1-x)(1-y)(1-z)$

在命题解释中，命题X和Y的合取用xy表示，X和Y的不相容析取用$x+y$来表示，$x=1$表示命题X是真的，$x=0$表示命题X是假的，命题X的否定表示为$1-x$。在命题解释中，没有蕴涵符号，这可以用$x(1-y)=0$表示。由上可见，布尔的命题解释满足原理$x=1$或$x=0$。

布尔除了对逻辑代数作了第二种解释——命题的解释以外，还提出了第三种解释。他在《逻辑的数学分析》一书的结尾，不明确地说，假言命题的理论可作为概率论的一部分来处理，在《思维规律》一书中有些部分探讨了把逻辑代数应用于概率的问题。我们用字母X表示相对于一切有效的信息K的概率，对布尔的符号体系进行简化，布尔的概率解释可表示如下：

① MAL. pp. 49—50.

如果X和Y是独立的，并给定K，则

$$P_k(X \text{ 和 } Y)=xy;$$

如果X和Y是互相排斥的，则

$$P_k(X \text{ 或 } Y)=x+y。$$

显然，布尔的概率解释不满足原理（＋）$x=1$或$x=0$，因为每一个概率并非或等于1，或等于0。

布尔的命题代数能处理许多传统逻辑不能解决的问题，例如，设有四种性质a，b, c，d，经实验知道，其间的关系有下列情况：

(1) 如果a, b同时出现,则c ,d必有一个并且只有一个出现；

(2)如果b ,c同时出现,则a, d或同时出现或同时不出现；

(3)如果a, b均不出现,则c ,d也均不出现；

(4)如果c ,d均不出现,则a, b也均不出现。

现在问如何由b, c来决定a。

按照布尔的解法，我们现在用现代的符号表示如下：

先把四个条件写成A=t（真）。在A中将d代以f（假）得A_1，又将d代以t得A_2，因此上式可写为$A_1 \vee A_2=t$，这里消去了d，将此式记为B=t。再在B中将a代以f得B_1，又将a代以t得B_2，因此B=t可写成$(B_1 \vee a) \wedge (B_2 \vee \neg a)=t$。由此可得，如果$B_1$不出现则a出现，如果a出现则$B_2$出现。$B_1$出现，经计算就是$b \vee \neg c$，$B_1$不出现相当于$\neg b \wedge c$出现；$B_2$出现,经计算就是$\neg b \vee \neg c$。所以，当b不出现而c出现时，a必出现；反之当a出现时，b和c中必有一个不出现。（“∨”表示“或”，“∧”表示“和”，“¬”表示“非”）。

布尔当时所提出的演算还很不成熟。例如，演算的许多公式没有逻辑解释；逻辑加法要求两类不相交；对命题之间的析取，他强调不相容的析取；用一个不确定的类表示特称命题，等等。尽管

有这些缺点，布尔的贡献还是伟大的，他在逻辑史上首先提出了一个逻辑演算，成为继莱布尼茨之后的数理逻辑的又一个创始人。以他命名的布尔代数现已发展为结构极为丰富的代数理论，并且无论在理论方面还是在实际应用方面都显示出它的重要价值。

第三节 逻辑代数的发展

一、耶芳斯和文恩

对布尔的逻辑代数首先作出改进的是英国逻辑学家耶芳斯(W.S. Jevons. 1835—1882)。他的主要逻辑著作有《纯逻辑，或没有量的质的逻辑》(1864),《科学原理》(1874)。

耶芳斯认为，任一命题都可用主谓词之间的一种等同关系来表达。因此，他使用相等记号来表示命题中的系词。在耶芳斯的逻辑中，只有加法，乘法和否定，没有布尔的减法和除法。耶芳斯对布尔代数的最大改进是，将布尔的不相容的“或”(符号“+”),改为相容性的，对出现在+号两边的记号不加任何限制。这给布尔代数提供了最大简化的可能性。耶芳斯用大写字母表示类，相对于全类的补类用小写字母来表示。矛盾律用等式$Aa=0$来表示，这里0是空类符号。把逻辑表达式展开为组成部分可写成以下形式：

$$A=A(B+b)(C+c)。$$

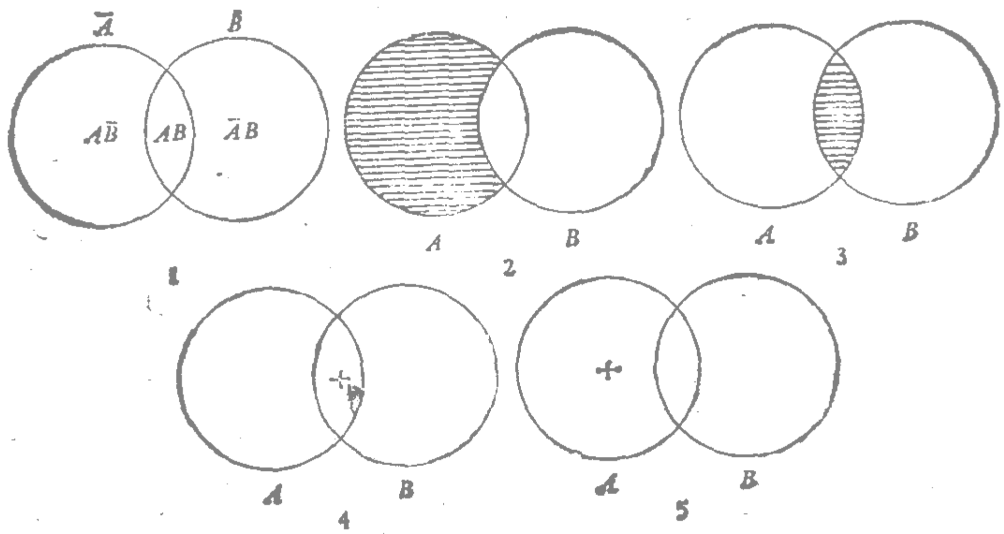
耶芳斯区分了类之间的三种等同关系：(1)简单等同，用$A=B$表示；(2)部分等同，用$A=AB$表示；(3)有限制的等同，用$AB=AC$表示，例如“水银(B)在低温(A)下是液态金属(C)”就是有限制的等同关系。

耶芳斯还引入了布尔函数的类型这个概念。如果一个函数可以从另一个函数，用交换变元和用否定字母替代某些字母而得到，那么这两个函数就具有同一类型。例如，$f(x, y, z)$和$f(y, x, z)$就是两个同类型的函数。耶芳斯提出的布尔函数类型这个概念在

开关电路中有重要作用。

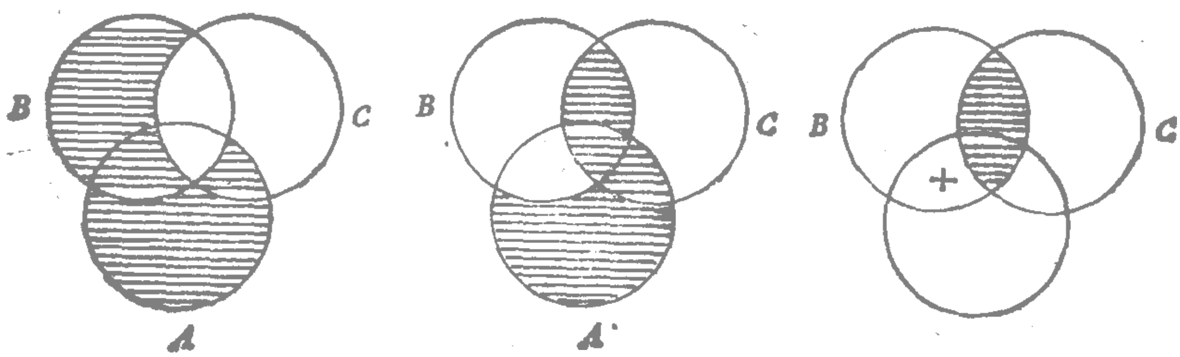
耶芳斯在1869年设计了一部逻辑机器，第二年呈给了皇家学会。这种机器可以看成是现代电子计算机的前身。

英国逻辑学家文恩(J. Venn, 1834—1923)在1881年出版了《符号逻辑》一书。他用图解法表示布尔代数，他的图解在逻辑史上称为“文恩图解”。这里我们简单介绍他的方法。



在图1中，论域由四个部分组成：AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ 和 $\bar{A}\bar{B}$。每一个园代表一个类，两个类在论域中的关系就形成四种。图2表示在B外没有A，文恩写成 $A\bar{B}=0$，即“所有A是B”。图3表示无A是B，文恩写成 AB=0。图4表示有A是B，写成 $AB\neq 0$，在图上 $\neq 0$ 用＋号表示。图5表示有A不是B，写成 $A\bar{B}\neq 0$。

三段论用三个圆表示如下：



所有B是C	无B是C	无B是C
所有A是B	所有A是B	有A是B
所有A是C	无A是C	有A不是C

二、皮尔士

著名的美国哲学家和逻辑学家皮尔士(C. S. Peirce, 1834—1914)独立于耶芳斯，对布尔的逻辑代数作了重大改进。他的主要逻辑论文编在《皮尔士全集》第3卷《精确逻辑》中。

1867年皮尔士首先把算术加与逻辑加严格区别开来，逻辑加是相容的，算术加是不相容的，他用 $a \dotplus b$ 表示逻辑加，用 $a+b$ 表示算术加。在他的系统中取消了减法和除法。现在我们来看看皮尔士的几个定义：①

1. 等同。$a \doteq b$ 表达两个事实：任一a是b并且任一b是a。这就是说，$a \doteq b$ 意味a和b是同样的类。

2. 逻辑加。$a \dotplus b$ 表示这样的类，其分子包含所有a的分子和所有b的分子，而没有其它分子。这就是说，$a \dotplus b$ 是由a而非b, b而非a和既是a又是b的分子所构成的类。

3. 逻辑乘。a, b表示既是a又是b的东西所构成的类。

4. 0表示空类，如果a是任一个类，则 $a \dotplus 0$ 是a。

5. 1表示全类(皮尔士称它为"有"或"存在"),如果a是任一个类，则a是a，1。

6. 算术加。a＋b表示：如果 $a, b \doteq 0$，则a＋b与 $a \dotplus b$ 相同，但如果a和b是有共同外延的类，那么a+b就不是一个类。

7. 算术乘。ab表示这样一个事件：当a和b是彼此独立的事件时，ab＝a, b。所谓a和b是彼此独立的事件是指它们分别是一些项的总和(a是 A_1, A_2, A_3 等等的总和，b是 B_1, B_2, B_3 等

---

① Collected Papers of C. S. Peirce, vol. 3, Harvard University Press, 1933, pp. 3—26.(以下此书缩写为C. P.)

等的总和），a和b中的每一项皆不相同，使得由a和b的项一起组成一个类，皮尔士写成x=Σ(A, B)，Σ是总和记号,这实际上是说x是由序偶（A, B）组成的类，并且在a中的一个项在b中有一个相应的项。算术乘和逻辑乘虽有所不同，但也有相同之处，即当a和b独立时，它们是同样的。

与逻辑加、逻辑乘、算术加和算术乘相应,还有四种逆运算。另外，皮尔士用等号＝表示数字相等的算术关系，这就是说a=b表示a和b两个类的基数相等，因此有：

如果a b,则a=b;

a ＋ b=(a ⫠ b) ＋ (a, b)。

原来，在布尔的代数中，a+a无法解释，经过皮尔士的改进之后，a ⫠ a = a是一条定理，可以解释为：a类与自身的逻辑和等于自身。逻辑加与算术加之间关系是：

如果无a是b (即a, b=0) ,则a＋b=a ⫠ b。

逻辑加是交换的，也是结合的，这就是说，

a ⫠ b = b ⫠ a，

(a ⫠ b) ⫠ c = a ⫠ (b ⫠ c)。

逻辑乘有以下的重言律，交换律和结合律：

a，a = a，

a, b = b, a，

(a, b)，c = a, (b, c)。

逻辑加和逻辑乘都有分配律：

(a ⫠ b), c = a，c ⫠ b，c

a, b ⫠ c = (a ⫠ c)，(b ⫠ c)。

皮尔士用 ﹣ 表示逻辑减记号，其定义是：

如果b ⫠ x ＝ a，则x = a ﹣ b。

这里x不是完全确定的。如果x是最小的，则a ﹣ b = a-b=a-（a, b）；如果x是最大的，则a ﹣ b=ab+a-b = a 如果b类不包含在a类之中，则a ﹣ b是不可解释的。为了从系统中

排除不可解释的情况，皮尔士用以下式子来定义逻辑减：

$$a \neg, b = v, a, b + a, \bar{b} + [0 \neg 1], \bar{a}, b。$$

在上式中，v是一个不确定的类记号，(0, —1) 是一个完全不可解释的符号，类上加一横表示否定。上式是说，a ¬ b 类等于既是a又是b的不确定的类，加上是a而不是b的类，其条件是没有一个b的分子不是a；即 $\bar{a}$, b=0 ， a ¬ b才是可解释的。

皮尔士用a; b表示逻辑除，其定义是：

如 果 b, x, a 则 x= a ; b。

这里x不完全由这个条件确定，如果x是最小的，则a; b= a,b ，a ；如果x是最大的，a; b = $\bar{a}$, $\bar{b}$ +a b； 如果a不是完全在b之中，a; b就是不可解释的。皮尔士用(1; 0) 代表不可解释的符号，a; b可定义为：

$$a; b = a, b + v, \bar{a}, \bar{b} + (1; 0), a, \bar{b}。$$

这就是说，a; b类等于既是a又是b的类，加上既非a又非b的类，其条件是无a不是b。

由上可见，在皮尔士的系统中，逻辑减和逻辑除可以通过逻辑乘、算术加(逻辑加)和否定的运算来定义,因而可以除去。皮尔士以后，在布尔代数的发展中，逻辑学家们普遍采用逻辑加和逻辑乘作为最基本的运算，减法和除法已成为历史的陈迹。

1870年皮尔士在布尔代数系统中引入类包含的概念，对布尔代数又作了新的最重大的改进。他用符号 —< 表示“ 包含于 ”,即与“ ≤ ”的意思是一样的。①他说“ 包含于 ”是一种传递的关系。②即如果 x—< y 和 y—< z， 那么 x—< z。接着，他用 —< 来定义等词 =，即他以前定义的 =， x= y 就是 x—< y并且 y —< x。小于关系用 < 表示， x<y 就是 x—< y 并且并非 y —< x。皮尔士在这里所定义的“ 小于 ” 实质上是“ 真包含于 ”。 x> y 就是 y < x ,>表示“ 大于 ”。皮尔士所说的“ 大于 ”实质上是“ 真包含 ”。

---

①C. P. vol. 3, p. 28,

②同上。

由上可见,皮尔士对莱布尼茨首先提出的区别"包含"和"真包含"的思想作了进一步的发展。他在布尔代数系统中，提出了许多有关包含关系的定理，例如，

(1) 如果 x —< y 并且 y —< z，则 x —< z。

(2) x —< x ⊹ y。

(3) 如果 a —< b，则有一个项 x 使得 a ⊹ x=b 。

(4) 如果 a —< b，则有一个项 x 使得 b, x=a。

(5) 如果 a —< b，则 c ⊹ a —< c ⊹ b。

(6) a, b —< a，

a, b —< b 。

(7) a —< a ⊹ b，

b —< a ⊹ b。

(8)如果 a —< b，则 c^b —< c^a。这里 c 代表"非",这条原理是说，如果 a 包含于 b，则非 b 包含于非 a。①

在1880年，皮尔士对布尔代数又作了新的改进。他在一篇当时未发表的论文中指出，所有的布尔选择函数都可以用"既非……又非……"作为初始运算加以表达。他说："x 入 y 意味着 x 是 f 并且 y 是 f"。②这里"人"表示"既非……又非……"，"f"代表假。皮尔士的这一发现在当时没有引起人们的重视。直到1913年，美国逻辑学家舍弗(Sheffer)提出了用垂直竖函项"|"来构造逻辑代数系统(实质是命题演算系统)的思想，使皮尔士的预见得以实现。舍弗竖|表示"非……或者非……",根据对偶原理,也可解释为"既非……又非……"。

舍弗的系统由以下几条原理构成：③

1. 至少有两个不同的元素。

2. 对一切元素 a 和 b 而言，a|b 是一个元素。

---

① 见 C. P. vol. 3, 81 节和 91 节。

② C. P. vol. 4. 12—20节。

③见威廉·涅尔等《逻辑学的发展》，第538—539 页，

3．对每个元素a而言（这里所提到的a的组合也是元素），$(a|a)|(a|a)=a$。

4．对一切元素a和b而言（这里所提到的它们的组合也是元素），$a|\{b|(b|b)\}=a|a$。

5．对一切元素a，b和c而言（这里所提到的它们的组合也是元素），$\{a|(b|c)\}|\{a|b|c)\}=\{(b|b)|a\}|\{(c|c)|a\}$。

$a|b$可解释为$\bar{a}\times\bar{b}$或$\bar{a}+\bar{b}$，$a|a$可解释为$\bar{a}$。这样原理3就是重言律：

$$a|\bar{a}=\bar{\bar{a}}\times\bar{\bar{a}}\text{（或 }\bar{\bar{a}}+\bar{\bar{a}}\text{）}$$
$$=a\times a\text{（或 }a+a\text{）}$$
$$=a\text{。}$$

原理4就是基元律：

$$a|(b|b)=a|(\bar{b}\times\bar{b})\text{[或 }a|(\bar{b}+\bar{b})\text{]}$$
$$=a|(\bar{b}\times b)\text{[或 }a|(\bar{b}+b)\text{]}$$
$$=a|0\text{[或 }a|1\text{]}$$
$$=\bar{a}\times\bar{0}\text{[或 }\bar{a}+\bar{1}\text{]}$$
$$=\bar{a}\times 1\text{[或 }\bar{a}+0\text{]}=\bar{a}$$

原理5就是分配律：

$$(\overline{\bar{a}\times(\overline{\bar{b}\times\bar{c}})})=(\overline{\bar{a}\times(\overline{\bar{b}\times c})})=a+(\bar{b}\times\bar{c})$$
$$=\bar{\bar{a}}+(\bar{b}\times\bar{c})=a+(\bar{b}\times\bar{c})$$
$$=(a+\bar{b})\times(a+c)\text{。}$$

原理5的另一形式是

$$a\times(\bar{b}+c)=(a\times\bar{b})+(a\times\bar{c})\text{。}$$

皮尔士对布尔代数除了作了类的解释之外，还发展了布尔的命题解释的思想。在这方面，他的做法是，用符号“—<”表示命题之间的蕴涵关系或推出关系。他说：“形式A—<B或A蕴涵B，和A—<B或A不蕴涵B，既包含假言命题又包含直言命题。因此，说所有人是有死的等于说如果任何人具有任一特性那么有死

的东西就具有这个特性。说‘如果A那么B’显然等于说从A逻辑地或超出逻辑地得到B。通过把系词(指—<—引者)所表达的关系等同于推出关系，我们就把命题同推理，词项同命题等同起来了。”①皮尔士把表达类之间包含关系的直言命题转变为假言命题，他的办法是把类名词解释成一元关系词(一元谓词)，例如在“所有人是有死的”这个直言命题中“人”变成“_是人”“有死的”变成“_是有死的”,都带有一个空位,上述直言命题理解为“对任何东西而言,如果它是人,那么它是有死的”。②这样直言命题就转化成假言命题或条件命题。经过这样的处理之后，传统的四个直言命题可用以下形式表达：

A. a—<b 每一a是b。

E. a—<$\bar{b}$ 无a是b($\bar{b}$代表“非b”)。

I. $\breve{a}$—<b 有a是b($\breve{a}$代表“有a”)。

O. $\breve{a}$—<$\bar{b}$ 有a不是b。③

在这里，皮尔士把符号“—<”解释成形式蕴涵的符号。

另一方面，皮尔士对假言命题作了实质蕴涵的解释。他明确地说：“斐洛的观点是大多数逻辑学家所愿意采用的。它的优点是，它是完全可理解的和简单的。”④“如果A那么B”只是说“没有A真而B假的情形”。⑤皮尔士看出这会产生一种后来所说的“实质蕴涵的悖论”，他举了一个例子：“如果魔鬼当选为美国总统，这将对人民的精神福利极为有益”，由于他不被选为美国总统，上述命题为真。尽管有这样的悖论，皮尔士认为这是不重要的，从逻辑的目的出发，我们应当把假言命题的意义用得特殊一些才行。

皮尔士对命题之间的蕴涵关系同推出关系不作严格的区别，

---

①C. P. vol. 3, 175节。

②同上，475节。

③C. P. vol. 3, 177节。

④同上，441节。

⑤同上，374节。

这是同他关于推理的指导原则的理论密切相关的。他说："推理的行为可以表述成一个命题，它是说：在任一给定的一般方式中，与任一真命题p有关系的每一命题c是真的。这样一个命题称之为这类推理的指导原则，它蕴涵着这类推理的有效性。当推理首先被引出时，指导原则没有呈现出来，但是它所表述的行为是积极的，使得在考虑了所相信的前提之后，根据一种感知，结论就被断定为是真的。然后，当推理受到逻辑的批评时，我们就作出一个新的推理，其中的一个前提是前一个推理的指导原则，据此，以某种方式彼此相关的命题就适合于做一个有效推理的前提和结论，而另一个前提是一个所考察的事实，也就是说，给定的关系存在于受批评的推理的前提和结论之间。由此可得结论：推理是有效的。"①皮尔士解释说："我们不仅需要形式P. . C来表达一个论证，也需要一个形式$P_i \prec C_i$来表达它的指导原则的真。这里P_i表示前提类中的任一个前提，C_i表示相应的结论。"②无效推理的指导原则，皮尔士用$P_i \not\prec C_i$来表示，$\prec$上的一横表示否定。

皮尔士根据他的蕴涵关系，推出关系和指导原则的理论，构造了一种系词代数，即以系词$\prec$为主要关系的命题代数，我们可以举出他的一些定理如下：

(1) $x \prec x$（同一律）

(2)

y 和 x 是同样有效的推理。

$\therefore$ z $y \prec z$

(3) $\{x \prec (y \prec z)\} = \{y \prec (x \prec z)\}$，此式由（2）导出。

(4）由（1）可得$(x \prec y) \prec (x \prec y)$，再由（2）可得：

$x \prec y$ x

$\therefore$ y

① C. P. vol. 3，第164节。
② 同上，第165节。

这就是后来所说的分离规则。

（5）由（4）可得：

$$x \quad x \prec y \quad y \prec z$$
$$\therefore z$$

再由（2）可得：

$$x \prec y \quad y \prec z$$
$$\therefore x \prec z$$。

这是三段论的Barbara。

皮尔士的系词代数不但表达了后来的命题演算，而且对亚里士多德的三段论作了推广，例如，

（6）从（5）和（2）可得：

$$S \prec P$$
$$\therefore (x \prec S) \prec (x \prec P)$$

也可得：

(7)
$$S \prec P$$
$$\therefore (P \prec x) \prec (S \prec x)$$。

(8) 从系词 $\prec$ 的传递性可得：

$$(S \prec M) \prec (S \prec P)$$
$$(S \prec P) \prec x$$
$$\therefore (S \prec M) \prec x$$

据（6）从（$M \prec P$）可得（$S \prec M$）$\prec$ ($S \prec P$)。

因此可得：

$$M \prec P$$
$$(S \prec P) \prec x$$
$$\therefore (S \prec M) \prec x$$。

皮尔士称它为小词间接三段论，他举了一个例子如下：

所有人是有死的，

如果伊诺克和艾理加是有死的，那么圣经就是错误的，

∴ 如果伊诺克和艾理加是人，那么圣经就是错误的。

此外，他还提出了有关实质蕴涵的若干定理，例如，{(x —< y) —< x} —< x，现在称为皮尔士律。

三、施罗德

德国逻辑学家施罗德 E. Schröder，1841—1902）对布尔代数也作了重要发展。他的代表作是《逻辑代数讲义》（共3卷，莱比锡，1890, 1891和1895）。他对布尔代数所做的第一个改进是，对符号“＋”作了相容性的解释。其次，他根据类包含关系来构造类演算，而不是像布尔那样利用等式关系。他用符号a € b表示“α包含于b，但a不必是b的真部分”，a(b表示“a真包含于b”，他说符号(类似于小于符号＜。施罗德提出了以下的公理系统①

1. a € a。
2. 如果a € b并且b € c，那么a € c。
3. (a+b) € c当且仅当a € c并且b € c。
4. c € ab当且仅当c € a并且c € b。
5. a(b+c)=ab+ac。
6. a € 1，这里1表示全类。
7. 0 € a，这里0表示空类。
8. 1 € a + a′，这里a′是a相对于1的补类。
9. aa′ € 0。

施罗德对布尔代数也作了命题的解释。任何命题都有其有效性的持续期间，也就是在它为真时的所有时间延伸的总和。a和b用来表示命题和它的有效性持续期间。a € b被解释成a的有效持续期间包含于b的有效性持续期间。0解释成空持续期间，1解释成永恒。

---

① 参看 Styazhkin, H M L, p. 209,

四、麦柯尔

英国逻辑学家麦柯尔（H. McColl，1837—1909）与耶芳斯、皮尔士和施罗德不同，从另一方向发展逻辑代数，使命题逻辑从类演算中独立出来，建立了一个系统，标志着在弗雷格的逻辑演算建立之前命题逻辑发展的最高水平。下面我们来介绍麦柯尔的系统。①

首先，他给出了以下的定义：

1．符号 A, B, C, …代表命题；A=0 意为"A是假的"，A=1 意为"A是真的"；A=B 表示 A 和 B 是等价的。

2．符号 A×B×C（简写为 ABC）是由 A, B和 C（称之为"因子"）组成的复合命题。等式 ABC=0 表示并非所有命题是真的，即至少有一个是假的。三个因子以上的复合命题可用同样的方法定义。"×"实际上是合取号。

3．符号 A＋B+C 代表一个不定命题，A, B 和 C 是它的项。等式 A＋B+C=0 意为所有三个组成命题都是假的。等式 A＋B＋C=1 表示并非所有三个命题是假的，即至少有一个是真的。三个项以上的不定命题可用同样方法定义。"＋"实际上是析取号。

4. 符号 A′ 是命题 A的否定。A和 A′的关系是：

$$A+A'=1$$

$$AA'=0$$

5. 如果不定命题 A+B＋C中仅有一个项是真的，或者两个项不是同时真的，那么我们就说这些项是互相不一致的，或互相排斥的。

6．符号 A: B意为命题 A蕴涵命题 B，或如果 A是真的那么 B也是真的。麦柯尔在注释中说，A: B 同等式 A=AB 是等价

① 转引自 Bochenski，HFL，pp. 309—310，pp. 335—337。

的命题。麦柯尔的蕴涵同实质蕴涵(用现在通用的符号表示为 $A\rightarrow B$，可定义为 $A'+B$)显然不同，它比较符合直观上所理解的蕴涵关系，不会引起怪论。麦柯尔的蕴涵($A:B$ 或 $A=AB$)是一种强蕴涵，不能只靠 A, B 的真假而决定其真假，它要求 A, B 之间有一定的意义联系。

麦柯尔系统的主要规则有：

规则 1(分配律)。

$A(B+C)=AB+AC$;

$(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD$。

规则 2。

$A=AB$; $A=AA=AAA$ 等等。

$A=A(B+B')=A(B+B')(C+C')=\cdots$

$B+B'=1=C+C'$

规则 3。

$(AB)'=AB'+A'B+A'B'=AB'+A'(B+B')$

$=AB'+A'=A'B+B'(A+A')=AB'+B'$。

这里 $A+A'=1$，$B+B'=1$。

同样可写出 $(ABC)'$ 的表达式

规则 4。

$(A+B)'=A'B'$，

$(A+B+C)'=A'B'C'$，等等。这实际上是是德摩根律及其推广。

规则 5。

$A+B=\{(A+B)'\}'=(A'B')'$

$=A'B+A=AB'+B$。

规则 11。

如果 $A:B$ 那么 $B':A'$。蕴涵 $A:B$ 同 $B':A'$ 是等价的。麦柯尔称它为换质位原理。

规则 12。

如果 $A:B$，那么 $AC:BC$，这里 C 是任一命题。

规则13。

如果 $A:a$， $B:\beta$， $C:r$，那么 $ABC:a\beta r$。这一规则对任何数目的蕴涵都是真的。

规则14。

如果 $AB=0$，那么 $A:B'$ 和 $B:A'$。

规则15。

如果 $A:B, B:C$，那么 $A:C$。

麦柯尔把 $A\div B$ 定义为 $A:B'$，即 A 不蕴涵 B。

规则16。 $A\div B$ 同 $B'\div A'$ 是等价的。

规则17。

如果 $A:B$ 并且 $A\div C$，那么 $B\div C$。

根据定义和推理规则可得一系列命题逻辑的公式，这里我们举出一些：

（1） $1'=0$，$0'=1$；

(2) $1=1+a=1+a+b=1+a+b+c$ 等等；

(3) $(ab+a'b')'=a'b+ab'$；

$(a'b+ab')'=ab+a'b'$；

(4) $a:a+b:a+b+c$ 等等；

(5) $(a+A)(a+B)(a+C)\ldots=a+ABC\ldots$

(6) $(a:b):a'+b$;

(7) $(a=b)=(a:b)(b:a)$；

(8) $(a=b):ab+a'b'$；

(9) $(A:a)(B:b)(C:c)\ldots:(ABC\ldots:abc)$;

(10) $(A:a)(B:b)(C:c)\ldots:(A+B+C\ldots:a+b+c)\ldots$

(11) $(A:x)(B:x)(C:x)\ldots=(A+B+C\ldots:x)$;

（12) $(x:A)(x:B)(x:C)\ldots=(x:ABC\ldots)$

(13) $(A:x)+(B:x)+(C:x)\ldots=(ABC\ldots:x)$;

（14) $(x:A)+(x:B)+(x:C)\ldots=(x:A+B+C\ldots)$。

麦柯尔所建立的系统是命题代数，除讨论真假值以外，还讨论相等关系（A=B）。A=B不但指A，B同真假，而且指它们同内容。这与命题演算有所不同，在命题演算中只讨论命题的真假值，不讨论相等性。只要对命题代数作些修改，就可变为命题演算。

第八章　关系逻辑

第一节　德摩根的关系逻辑

德摩根（A. De Morgan，1806—1871）是19世纪英国数学家和逻辑学家。生于印度，出生后刚7个月就回到英国。卒于伦敦。他在少年时就对数学发生浓厚的兴趣，1823年考入剑桥三一学院，1827年毕业。1828年后在伦敦的大学学院任数学教授多年。他曾任伦敦数学学会第一届会长。

德摩根对19世纪数学的发展作出了贡献。他于1838年提出以“数学归纳法”的概念描述以往数学家们曾经使用的证明定理的方法。1842年，他发表了《微积分演算》一文，详尽讨论微积分基本原理和极限定义，并讨论了无穷序列和确定序列收敛的新规则。他曾从事当时称为“形式代数”的研究，其成果有助于对复数的性质给出一个完全的几何解释。

德摩根的主要成就在逻辑方面，主要著作是《形式逻辑》(1847）以及从1846到1862年所写的5篇论文（发表于《剑桥哲学会学报》），最主要的一篇论文是1859年写的《论三段论Ⅳ和关系逻辑》。他在逻辑史上首先提出“论域”的概念，第一次明确用公式表达合取和析取的关系，现在称之为德摩根律。他还最先提出了关于“大多数”的推理，例如：“在特定的一群人中，大多数人有大衣，大多数人有马甲，所以有的人既有大衣又有马甲”。他用新的符号对古典逻辑作了改造。他的最主要贡献是创建了关系逻辑。皮尔士称德摩根是“关系逻辑之父”。下面我们从两个方面来论述德摩根对逻辑的贡献。

一、德摩根对古典形式逻辑的改造

我们在上面说过，对古典逻辑的改造是数理辑逻产生的一个起点。汉密尔顿的‘ 谓词量化 ” 学说代表了对古典辑逻进行改造的一个方向。德摩根与汉密尔顿有所不同，他主张对主词不但可以象古典逻辑那样进行量化,也可进行 质化 ”,即可以把否定词放在主词前面。德摩根说 :“ 一个命题是断定了两个名称之间有点一致或不一致。它表达对于一些称为X的思想对象，就有一些表现在或不表现在称为Y的思想对象中的对象：有些对象有两个名称，或者有其中之一但没有另一个，或者均没有。 ”①对一个名称X，其相反名称用x(即非－X) 表示。德摩根引入以下8个基本形 式：

A, X) Y = X y = y) x 所有X是Y= 无X是非－Y= 所有非－Y是非－X。

E, X Y=X) y=Y) x 无 X 是 Y= 所 有 X 是 非 － Y= 所 有 Y 是非－X。

I, XY=X: y=Y: x 有 X 是 Y= 有 X 不 是 非 － Y= 有 Y 不 是 非－X。

O, X: Y = Xy = y: x 有 X 不 是 Y= 有 X 是 非 － Y= 有 非 － Y 不是非－X。

以上实际上是古典逻辑的四种直言命题及其换质、换位的形式。以下是四种‘ 质化 ” 的直言命题：

A′ x) y = x . Y=Y) X 所 有 非 － X 是 非 － Y= 没 有 一 个 非 － X 是 Y= 所 有 Y 是 X。

E′ x. y=x) Y=y) X 没 有 一 个 非 － X 是 非 － Y= 所 有 非 － X 是 Y= 所 有 非 － Y 是 X。

I′ xy=x: Y=y: X 有 非 － X 是 非 － Y= 有 非 － X 不 是 Y= 有 非

---

①De Morgan：Formal Logic (London, 1926)。p. 63。

-Y不是X。

O′ x: y = xY = Y: X有非-X不是非-Y=有非-X是Y=有Y不是X。

德摩根把以上8种命题称为简单命题。他认为简单命题并没有给出主词和谓词之间关系的全部信息。要得到X和Y之间关系的全部信息，必须由8种简单命题组合成复合命题。经过分析，他认为只能得出以下七种复合命题：

P=O′+O,+I′+I,

D=A,+A′

D,=A,+O′

D′=A′+O,

C=E,+E′

C,=E+I′

C′=E′+I，

P称为复合特称命题：“有非-X是Y并且有X是非-Y并且有非-X是非-Y并且有X是Y”，它断定“X和Y”，“非-X和Y”，“X和非-Y”和“非-X和非-Y”四种可能性全部出现，也就是X类和它的补类不但和Y类相交而且与Y类的补类相交。

D断定了X和Y的外延是同一的；D，断定了X和Y的外延是下同一的，即X是Y的真部分；D′断定了X和Y的外延是上同一的，即X包含Y作为X的真部分。

C断定X和Y是相反关系（德摩根所说的相反关系实际上是矛盾关系，它们的外延合起来等于论域）；C，断定X是Y的下相反者，即没有一个东西既是X又是Y，但有的东西既不是X又不是Y，它们的外延合起来不等于论域；C′断定X是Y的上相反者，非-X不是非-Y并且有X是Y，X和Y的外延合起来穷尽了论域，并且它们在论域中相交，德摩根形象地说，它们的外延之和把论域填得太满以致溢出来了。

德摩根在把命题作了以上的处理之后，在此基础上展开了三

段论。他把三段论分为简单的和复合的。简单三段论是由简单命题构成的，复合三段论是由复合命题组成的。假如，A, E, E，就是一个简单三段论式，写成 X) Y+Y. Z = X. Z。复合三段论式，如 D, D, D，式，表示如果 X 是 Y 的下同一者并且 Y 是 Z 的下同一者，那么 X 就是 Z 的下同一者，这就是说：“下同一者的下同一者是一个下同一者”。这个复合三段论的前提是 A, +O′ 和 A, +O′，可由四种简单命题组合：A, A,、A, O′、O′ A 和 O′ O′，结论是 A, +O′。D, D, D，式要求以下三段论式同时成立：

A, A A X) Y + Y) Z = X) Z

0′ A, O′ Y : X + Y) Z = Z : X

A, O′ O′ X) Y+Z : Y=Z : X

德摩根详细地讨论了简单三段论和复合三段论的各种格式及其规则。

德摩根在 1850 年写的一篇文章《论逻辑符号》中把上述的符号体系加以改进，用 X）或（X 表示 X 是全称的，）X 或 X（表示 X 是特称的。例如 A 表示为“X)) Y”，E, 表示为“X)) y”或“X) . (Y”，I，表示为“X( ) Y”，O, 表示为“X( ) y”或 X (· (Y”。

二、关系逻辑的创建

德摩根是一位杰出的数学家，他在研究代数的过程中深感古典逻辑的局限性和研究关系的重要性。他在 1858 年写的论文《论三段论 III 和一般逻辑》（载《剑桥哲学会学报》，10[1856—1864]）中，对关系第一次作了处理。在 1859 年写的论文《论三段论 IV 和关系逻辑》（载同上刊物）中详尽地建立了形式的关系代数。德摩根认为，以前所讨论的三段论理论只是关系理论的特殊情形，三段论推理的规则实际上表述了同一关系的可逆的和传递的性质。当一个关系与它的逆关系是同样的时候（例如相似关系），这个关系就是可逆的。若就某个关系而言，如果关系者甲和乙有这个关系，

关系者乙和丙有这个关系，那么关系者甲和丙也有这个关系（例如祖先关系），在这样的情况下，这个关系就是传递的。德摩根所说的"可逆的关系"就是后来逻辑学家所说的"对称关系"，"关系者"就是"相对名词"或"关系名词"。

德摩根的基本关系命题形式是 X..LY，他说："令 X..LY 表示 X 是某个思想对象，它与 Y 有关系 L，或 X 是 Y 的 L 中之一。令 X.LY 表示 X 不是 Y 的 L 中的任一个。这里 X 和 Y 是主词和谓词：这些词指的是进入关系中的方式，而不是指所提到的次序。因此 Y 在 LY.X 中正如同在 X.LY 中一样，是谓词。"①

德摩根提出了以下几种关系逻辑的基本运算：

1．关系积。这是德摩根提出的一种最重要的运算。德摩根说："当谓词本身是一个关系的主词时，就可有一种组合：这样如果 X..L(MY)，如果 X 是 Y 的一个 M 的一个 L，那么我们就可把 X 看成是 Y 的一个'M 的 L'（'L of M' of Y），用 X..（LM）Y 或简单些用 X..LMY 来表示。"①LM 就是关系积，德摩根称它为组合。x..LMy 可以表示成 ∃z (xLz∧zMy)，这是说，有一个 z 使得 x 和 z 有 L 关系并且 z 和 y 有 M 关系。例如 L 代表兄弟关系，M 代表父亲关系，LM 就是伯叔关系。z 在 xLz 中是谓词，但在 zMy 中是主词，所以德摩根说："谓词本身是另一个关系的主词"。除关系积之外，德摩根还提出了 LM′，表示"每一个 M 的一个 L"；L′M，表示"仅仅 M 的一个 L"，"除 M 外没有任何东西的一个 L"。

2．逆关系。德摩根说："L 的逆关系通常定义为：如果 X..LY，那么 Y..L^{-1}X；如果 X 是 Y 的一个 L，则 Y 是 X 的一个 L^{-1}。L^{-1} 可以读成'X 的 L 逆，'。"②这就是说，X..LY 等价于 Y..L^{-1}X。L^{-1} 是 L 的逆关系。

---

① 见 Bochencki，HFL，p. 375。

② HFL，p. 375。

③ 同上，p. 376。

3．补关系。德摩根说：“假定在任意两个词项之间存在着关系。如果X不是Y的任何L，那么X对Y有某种非一L关系：令这个相反关系用l表示；因此给出X LY，就有X..lY。相反关系可以复合，尽管相反词项不行：对X来说，X并且非一X是不可能的；但Ll X，即X的一个非L的L，是可想象的。因此，一个人可以是X的一个非同党的同党。”①德摩根的补关系定义可以表示成：XLy等价于 xLy，即x和y之间有非一L关系，等于说并非在x和y之间有L关系。

在德摩根的关系逻辑中还有关系的逻辑和与逻辑积，这是类的逻辑和与逻辑积的推广。如X..(L＋M)Y表示X或是Y的L，或是Y的M(德摩根原来用，表示逻辑和)。这两种运算在德摩根的关系逻辑中不占重要地位。

德摩根提出了关系逻辑的一些主要原理：

1.“逆关系的相反者是相反者的逆关系：非一L^{-1}是非一$L)^{-1}$。因为X..LY等同于Y．非一L^{-1}X，也等同于X(非一L)Y，后者又等同于Y.(非一$L)^{-1}$X”。②这条原理是说，逆关系的补关系是补关系的逆关系。德摩根的证明方法如下。设原来的关系为L，其逆关系为L^{-1}，补关系为非一L，逆关系的补关系为非一L^{-1}，补关系的逆关系为(非一$L)^{-1}$。根据逆关系定义，X.LY等同于Y..L^{-1}X。根据‘ .’(表示关系不成立)和补关系定义，Y..L^{-1}X 等同于Y．非一L^{-1}X。根据补关系和逆关系定义，Y．非一L^{-1}X 等同于X.(非一L)Y,因为 Y.L^{-1}X 等同于 X.LY。X.(非一L)Y又等同于Y.(非一$L)^{-1}$X，这是根据逆关系的定义。由上可得，Y．非一L^{-1}X等同于Y(非一$L)^{-1}$X。原理1得到证明。

2.“互逆关系的相反者是互逆关系：因此非一L和非一L^{-1}是互逆的关系。因为X..LY和Y. .L^{-1}X是同一的；由此X..非-LY和Y..(非一L^{-1})X(前述两式的简单否定)也是同一的；所

① HF L, p. 376。
② 同上。

以非$-L$和非$-L^{-1}$是互逆的。”①这条原理是说，互逆关系的否定（补关系）是互逆的关系。L和L^{-1}是互逆的关系。根据逆关系定义，$X..LY$ 和 $Y..L^{-1}X$是同一的，因而$X..$（非$-L$）Y和$Y..$（非$-L)^{-1}X$也是同一的。据原理1，（非$-L)^{-1}$等于非$-L^{-1}$。因此，$X..$（非$-L)Y$和$Y..$非$-L^{-1}X$是同一的，非$-L$与非$-L^{-1}$是互逆的关系。德摩根的证明比较简单，我们在叙述他的证明时作了一点修改和补充。

3.“相反关系的逆关系是相反关系。因此，L^{-1}和非$-L)^{-1}$是相反关系。因为$X.LY$和$X..$非$-LY$彼此是简单否定的，所以它们的逆关系$Y..L^{-1}X$和$Y.$.（非$-L)^{-1}X$也是彼此简单否定的。由上可得，L^{-1}和非$-L)^{-1}$是相反关系。”②这条原理是说，互补关系的逆关系是互补的关系。L和非$-L$是互补的关系，$X..LY$ 和 $X..$非$-LY$彼此是排斥的，所以$Y..L^{-1}X$ 和 $Y..$非$-L^{-1}X$也是彼此相排斥的。据原理1，非$-L^{-1}$等于非$-L)^{-1}$。因此我们有$Y..L^{-1}X$和$Y..$（非$-L)^{-1}X$是互相排斥的，L^{-1}与（非$-L)^{-1}$是互补的关系。

在以上三条原理中，第一条是最重要的，由它可导出二、三两条，德摩根在陈述三条原理时没有明确地加以说明，他把第一条原理放在最后加以陈述。我们现在所作的变动可以清楚地揭示出三条原理之间的有机联系，也完全符合德摩根的思想。

4.“如果第一个关系包含于第二个关系，那么第一个关系的逆包含于第二个关系的逆；第二个系的相反者包含于第一个关系的相反者。”③

这里有两条原理。1）如果$X..L_1Y$包含于$X..L_2Y$，则$Y..L_1^{-1}X$包含于$Y..L_2^{-1}X$，这一原理是根据逆关系的定义得出的。2）如果$X..L_1Y$包含于$X..L_2Y$，那么$X..$非$-L_2Y$包含

---

① HFL, p. 376 。
②同上。
③HFL, p. 376。

于 X.. 非—L_1Y，这里德摩根把类包含关系的换质位原理(如果A包含于B，则非B包含于非A)，推广到关系逻辑中，再应用补关系的定义就可得到上述原理。

5."一个复合关系的逆使两个组成部分变为可逆关系并且交换其次序。"①这一原理实际上是说，关系积的逆关系是其组成部分逆关系的关系积，但其次序要交换一下，可用德摩根的符号表示为：

$$X..(LM)^{-1}Y \text{ 等同于 } X..(M^{-1}L^{-1})Y。$$

根据德摩根的思想，我们可以证明如下：

X..$(LM)^{-1}$Y 等同于 Y..(LM)X，等同于有一Z使得Y..LZ并且Z..MX，等同于有一Z使得Z..L^{-1}Y 并且 X..M^{-1}Z，这个式子就是X..$(M^{-1}L^{-1})$Y。

我们可举一个例子。设L为兄弟关系，M为父子关系，则LM为伯叔关系，$(LM)^{-1}$ 为侄子关系。L^{-1} 亦为兄弟关系，M^{-1} 为儿子对父亲的关系，$M^{-1}L^{-1}$ 表示"兄弟的儿子"关系即侄子关系。也就是说，$(LM)^{-1}$ 等于 $M^{-1}L^{-1}$。

德摩根十分重视传递关系，他给传递关系下了一个严格的定义："一个关系是传递的，如果一个关系者的关系者是同样的一个关系者；用符号表示为LL))L，由此也可表示为LLL))LL))L;等等。"②这实际上是说，如果xLy, yLz，则xLz，这时L就是传递关系，这里y是x的关系者，z是y的关系者，z是x的关系者的关系者，也是x的关系者。

他提出了关于传递关系的如下原理：

6."一个传递关系有一个传递的逆关系，但不必然有传递的相反关系：因为$L^{-1}L^{-1}$ 是LL的逆，所以由LL))L得出$L^{-1}L^{-1}$))L^{-1}"。③

---

① 同上，p. 377。
② HFL，p. 377,
③同上。

设 L 是传递关系，因此有：如果 xLy 并且 yLz 则 xLz，根据逆关系的定义，由上可得：

如果 $yL^{-1}x$ 并且 $zL^{-1}y$ 则 $zL^{-1}x$。

根据传递关系的定义，L^{-1} 是传递的。

例如"大于"关系是传递的，其逆关系"小于"也是传递的。"祖先"关系是传递的，但其补关系"非祖先"就不是传递的，由"x 不是 y 的祖先"和"y 不是 z 的祖先"不能得出"x 不是 z 的祖先"。

从德摩根所阐述的关系理论，我们可以看到，他在逻辑史上第一次突出了关系的概念，并且把关系的概念和关系的关系概念第一次符号化了，创建了关系逻辑，我们完全赞同皮尔士的评价，德摩根是当之无愧的"关系逻辑之父"。他使关系从性质的附庸中解放出来，突破了古典的主谓逻辑的局限性，为后来关系逻辑的发展开辟了道路。

第二节　皮尔士对关系逻辑的发展

罗素指出："对关系演算的一些提示在德摩根那里可以找到，但这一课题是首先由皮尔士发展的。"①皮尔士发展了德摩根的思想，在逻辑史上第一次全面、系统地建立了关系演算。皮尔士在 1870 年发表了论关系逻辑的第一篇论文，②他在谈到德摩根的著作时说："这个系统还留下一些所想望的东西。而且就布尔的逻辑代数而论，它有这样一个独特的优点，使得人们饶有兴趣地探讨它是否能推广到形式逻辑的整个领域，而不限于它最简单的、最无用的那一部分，即绝对名词的逻辑（在德摩根写书时，这是唯一知道的形式逻辑）。……在把旧符号推广到新对象上去的时候，我们当然必须遵循某些类比的原则，这些原则如果加以表述，就成为这些旧符号的新的、更广泛的定义。"③皮尔士在文章中首先对德摩

①Russell: Principles of Mathematics, Norton, New York, p. 23。
②Notation for Logic of Relatives, C. P. Vol. 3。
③C. P. Vol. 3, 45-46 节。

根的符号体系进行了推广，并提出了自己的一些新概念。1880年皮尔士发表《论逻辑代数》的论文，其中第三部分专论关系词逻辑；1883年发表《关系词逻辑》；1885年发表《论逻辑代数—关于记法的哲学》，论述了第一意念的关系词逻辑和第二意念的关系词逻辑。皮尔士的这些论文，大大发展了德摩根的思想，使关系逻辑成为一门内容十分丰富的学科。皮尔士的成果后来由施罗德所吸收。

下面我们来论述皮尔士关系逻辑的主要内容。

一、皮尔士关系逻辑的一些基本概念

皮尔士首先把逻辑词项分为三大类。第一类为绝对词，如马，树，人。皮尔士所谓绝对词就是类名词，他也称它们为一元关系词，表示为"___是一个人"。第二类词项涉及关系的概念，它需要加上另一个词项使其外延得以完整，如"___的父亲"，"___的情人"，"___的仆人"，它们是二元关系词，或称简单关系词。三元或三元以上的关系词称为结合词，如"___把___给___"。皮尔士用正体小写字母a（动物），h（马），w（女人），m（男人）等代表绝对词，小写斜体字母*l*（情人），*s*（仆人），*b*（恩人）等代表简单关系词；小写黑体字母**g**（___把___给___的给予者），**b**（把___出卖给___的告密者）等代表结合词。大写字母代表个体词。

皮尔士在论述中区别了关系项、被关系项和关系，他说："一个关系词是这样一个词项，其定义描述了某种对象系统，其第一分子由该词项指称，这第一分子称为关系项。系统的其它分子的名称（称之为被关系项）通常要被加上，以便进一步限制指称。在这些系统中，分子的次序是重要的，所以，(A, B, C)和(A, C, B)是不同的系统。"①例如，"___的父亲"是一个二元关系词，表示由对象偶(A, B)组成的一个系统，A代表父亲，称为关系项，B代表儿子，称为被关系项。"一个关系就是关于若干事物的一个事

① C. P. Vol. 3, 218节。

实。”①例如，火车头喷出蒸汽这一事实就构成了火车头与蒸汽之间的一种关系。但是皮尔士在论述过程中，并没有严格把“关系词”和“关系”加以区分，我们可从上下文中分辨出来。例如“____的母亲”是一个关系词，但皮尔士也说“母亲”是一个关系词，实际上是指母子关系。

皮尔士说：“令 A, B, C, D 等是所有的在论域中的个体对象；然后，所有的个体偶可以排成以下阵列：

A: A	A:B	A:C	A: D等
B:A	B: B	B:C	B: D等
C: A	C: B	C: C	C: D等
D:A	D:B	D:C	D:D等
等	等	等	等等

一个一般的关系词可以看成是若干个这样的个体关系词的逻辑和。令 l 代表“情人”；那么我们可以写

$$l = \Sigma_i \Sigma_j (l)_{ij} (I:J)$$

这里 $(l)_{ij}$ 是一个数字系数，如果 I 是 J 的一个情人，则 $(l)_{ij}$ 的值为 1，否则为 0。这里，逻辑和对论域中的所有个体而取。”②

在这段话里，符号 l 表示二元关系词“____的情人”，或“情人”，实际上是“爱”这种关系。这段话清楚地表明，皮尔士从外延上来考虑关系，把二元关系定义为对象偶的类，他进一步对这个定义作了推广，定义了三元关系，四元关系，等等。

二、基本运算③

1. 逻辑加。例如 $l \dotplus b$，意为“或是情人，或是恩人，或既是情人又是恩人”。皮尔士对“或”作了相容性的解释，因此，$l \dotplus b$

①同上，416节。

②C. P. Vol. 3, 329节。

③严格说来，“加”、“乘”等表示函项运算，是不带变元的；“和”、“积”等概念表示带变元的函项，它们是有区别的。$l \dotplus b$ 应当称为逻辑和，“$\dotplus$”才是逻辑加。皮尔士没有作这种区分。

也简单地表示为 $l+b$。 $(l+b)_{ij}=(l)_{ij}+(b)_{ij}$。

2. 逻辑乘。例如，(l, b)，意为“既是情人又是恩人”，定义为：

$$(b)_{ij}=(l)_{ij}\times(b)_{ij}。$$

这里，下标 ij 表示对象偶，也就是后来所说的二元关系的一对变目。皮尔士明确地把 l，b，$(l+b)$，(l, b) 作为二元关系来处理，而不是只把它们当作关系词。

3. 关系加。皮尔士用剑号 † 来表示这种运算，它的定义是：

$$(l \dagger b)_{ij}=\Pi_x\{(l)_{ix}+(b)_{xj}\}。$$

意为“除恩人外的一切事物的情人”，“x 的一个情人，或者 x 是一个恩人”，“所有非—恩人的情人”。在上述定义中，皮尔士使用了全称量词 Π_x。

关系加这种运算很不自然，皮尔士引进它是为了同关系乘相对应，它们的否定可以适用德摩根律。

4. 关系乘。例如，lb 表示“一个恩人的情人”，其定义是：

$$(lb)_{ij}=\Sigma_x(l)_{ix}(b)_{xj}$$

这里 Σ_x 是存在量词，皮尔士对关系乘所作的定义比德摩根大大前进了一步。

5. 关系的否定。设原关系为 l，其否定为 $\bar{l}$。皮尔士说：“每一关系词有一个否定关系词（象任何其它词项一样）；它可以在关系词本身的符号上画一直线来表示。一个关系词的否定包括每一个被关系词所排斥的偶，反之亦然。”①皮尔士没有用公式来表示，按照他的定义，我们有以下公式：

$$(\bar{l})_{ij}=\overline{(l)_{ij}}。$$

6. 逆关系。皮尔士说：“每一关系词也有一个逆关系词，通过交换偶中分子的次序而得到。因此，‘情人’的逆是‘被爱者’。逆可以用在关系词符号上画一曲线来表示，即 $\breve{l}$。它可用等式定义

---

①C. P. Vol. 3，330 节。

为：

$$(\breve{l})_{ij}=(l)_{ji}。”①$$

7.关系幂。l^{w} 表示每一个女人的一个情人。

8.关系倒幂。$l_{,}$ 表示仅仅一个仆人的一个情人。

关系幂和关系倒幂相当于德摩根提出的“x是y的每一个m的一个l”和“x是y的仅仅一个m的一个l”这两种句型。

此外还有包含于（—<）和相等（=）运算，这是类的包含于和相等运算的推广。

三、关系逻辑的主要原理

（一）关于否定关系（即补关系）和逆关系的几个重要原理

$$\bar{\bar{l}}=l \qquad \breve{\breve{l}}=l$$

$$\bar{\breve{l}}=\breve{\bar{l}}$$

$$(l —< b)=(\bar{b} —< \bar{l}) \qquad (l —< b)=(\breve{l} —< \breve{b})$$

第一条原理是说，补关系的补关系是原来的关系；第二条原理是说，逆关系的逆关系是原关系。后三条原理在德摩根那里已经陈述过了，只不过皮尔士在符号表述上有了改进，引进了关系之间的“包含”符号。

（二）关于逻辑加和逻辑乘的几个重要原理

1. 如果 $l —< s$ 并且 $b —< s$，则 $l+b —< s$.
   如果 $s —< l$ 并且 $s —< b$，则 $s —< l\times b$.

2. 如果 $l+b —< s$，则 $l —< s$ 并且 $b —< s$.
   如果 $s —< l\times b$，则 $s —< l$ 并且 $s —< b$.

3. $(l+b)\times x —< l\times s+b\times x$.
   $(l+s)\times(b+s) —< l\times b+s$.

第三条原理实质上是分配律。其余原理与类代数中的原理类同。

---

①同上。

4. 关于逻辑加和逻辑乘的德摩根律

(1). $\overline{l+b}=\bar{l} \times \bar{b}$

(2) $\overline{l \times b}=\bar{l}+\bar{b}$

(三) 关于关系加和关系乘的几个重要原理

1. 结合律

(1) $l \dagger (b \dagger s)=(l \dagger b) \dagger s$

(2) $l(bs)=(lb)s$

但是结合词(三元以上的关系)不服从结合律。

2. 分配律

(1) 关系乘对逻辑加的分配律

$$(l+b)s=ls+bs$$

例如，这个公式可以解释为：仆人的情人或恩人就是仆人的情人或仆人的恩人。

(2) 关系加对逻辑乘的分配律

$$l \times b \dagger s=(l \dagger s) \times (b \dagger s)$$

这条分配律可以解释为：一切非－仆人的情人和恩人就是一切非－仆人的情人并且一切非－仆人的恩人。

3. 关系乘与关系加之间关系的原理

(1) $l(b \dagger s) \prec lb \dagger s$

$(l \dagger b)s \prec l \dagger bs$

前一公式是说，凡作为每一个非－仆人的恩人这样一个对象的情人，都是每一个非－仆人的一个恩人之情人。后一公式是说，凡与一个仆人有每一个非－恩人的情人关系者，都是除仆人的恩人之外每一东西的一个情人。

(2) 关系乘与关系加的德摩根律

$$\overline{l \dagger b}=\bar{l}\bar{b}$$

$$\overline{lb}=\bar{l} \dagger \bar{b}$$

皮尔士正是为了使关系乘与关系加之间具有逻辑乘与逻辑加(即非关系的乘和加)之间的德摩根律形式，才引进了关系加的定

义，作了令人难于理解的解释。

4.关于复合关系的逆关系的原理

(1) $\breve{l+b} = \breve{l} + \breve{b}$ (2) $\breve{l \times b} = \breve{l} \times \breve{b}$

(3) $\breve{l \dagger b} = \breve{b} \dagger \breve{l}$ (4) $\breve{lb} = \breve{b}\breve{l}$

德摩根曾讨论过(4)，皮尔士作了扩充。

5.展开式原理

(1) $(l \times b)s = \Pi_p\{l(s \times p) + b(s \times \bar{p})\}$

(2) $l(b \times s) = \Pi_p\{(l \times p)b + (l \times \bar{p})s\}$

(3) $(l + b) \dagger s = \Sigma_p\{[l \dagger (s + p)] \times [b \dagger (s + \bar{p})]\}$

(4) $l \dagger (b + s) = \Sigma_p\{[(l + p) \dagger b] \times [(l + \bar{p}) \dagger s]\}$

这里，Π 是全称量词符号，Σ 是存在量词符号。

5. 关于关系幂和关系倒幂的一些原理

上文说过，皮尔士对德摩根的两种复合的关系作了发展，提出了关系幂和关系倒幂的概念，给出了许多定理，①这里我们仅举几例。

(1) $(s^l)^w = s^{(lw)}$

据关系幂的定义，x^y 意为"每一个 y 的 x"。$(s^l)^w$ 意为那些东西，它们同每一个女人具有她的每一个情人的仆人这种关系"。$s^{(lw)}$ 意为"作为一个女人的情人这一切东西的一个仆人"。可见，它们是同一的。

(2) $s^w \longrightarrow sw$

s^w 意为"每一个女人的仆人"，它可以写成：

$s^w = (s^{(w_1 + w_2 + \ldots)}) = s^{w_1} \times s^{w_2} \times \cdots = sw_1 \times sw_2 \times \cdots$，

这里 W_1，W_2 等代表个体词，这样 $s^{w_1} = sw_1$，它们都表示"W_1 这个个体的 s"。

另一方面，sw 意为"一个女人的仆人"，$sw = s(w_1 + w_2 + \cdots) = sw_1 + sw_2 + \cdots$，

① 参看 C. P. Vol. 3, 70—80 节，113—118节。

但是 $s^{w_1} \times s^{w_2} \times \cdots —\!\!< s^{w_1} + s^{w_2} + \cdots$，也就是说，同样一些项的逻辑积包含于它们的逻辑和，所以我们有 $s^w —\!\!< sw$。这里要注意的是，上述原理的逆不成立，因为 sw（一个女人的仆人）并非 s^w（每一个女人的仆人）。

（3）如果 $x —\!\!< y$，则 $z^y —\!\!< z^x$。

由（2）可得 $l^s —\!\!< ls$，即"每一个仆人的情人"是"某一个仆人的情人"，据（3）可得 $w^{ls} —\!\!< w^{(l^s)}$，这个公式可以解释为：仅仅女人（除女人外没有东西）的一个仆人之情人，是仅仅女人的每一个仆人之情人。

（3）是关系倒幂的一个原理。

关系幂还可应用于多元关系，例如用 b 代表"把____出卖给____的告密者"，m 代表"人"，a 代表"敌人"，我们可以有以下的一些组合：

bam：把一个人出卖给他的一个敌人的告密者。这是关系积。

$(ba)^m$：把每一个人出卖给他的某个敌人的告密者。这是关系幂。

ba^m：把每人出卖给每个人的一个敌人的告密者。

b^{am}：把一个人出卖给所有人的所有敌人的告密者。

$b^a m$：把一个人出卖给他的每一敌人的告密者。

b^{am}：把每一个人出卖给他的每一敌人的告密者。

由上可见，皮尔士的关系逻辑的内容十分丰富，他发展了德摩根所提出的关系逻辑的一些概念，提出了一些崭新的关系概念，将关系理论构造成一种形式化的关系代数系统。

四、量词理论

皮尔士在发展关系逻辑的同时，还建立了一套量词理论，这标志着数理逻辑的发展已成熟到建立谓词演算的程度。这里让我们看一看皮尔士的量词理论，这对了解数理逻辑发展史上的这一飞跃时期是很有教益的。

皮尔士在1883的《关系词逻辑》中，开始在关系词中使用下标，并使用了全称量词和存在量词。1885年，他对量词理论又作了进一步的说明。他原来是把关系词，如“情人”，“恩人”，“仆人”，当成与类名词一样的词，使用逻辑代数的方法构成了关系代数，这是一种不用量词和个体词的关系演算。皮尔士对此并没有给予很高的评价，他认为他发明了一种比上述关系代数更有价值的代数，他称之为一般逻辑代数，也就是我们现在所说的量词理论。皮尔士在1897年说：“除了刚才所描述的代数外，我曾发明了另一种据我看来是更有价值的代数。……在这种代数中，每一个命题由两部分组成，即它的量词部分和布尔式子部分。布尔式由若干用非关系的乘法和加法而联合起来的关系词组成。我们不需要关系运算（虽然如果想要的话可以引进）。每一个基本的关系词用一个带有标记的字母来表达，以指明填补关系词空位的个体。记号－写在这样的关系词上表示否定。布尔式的左边写上量词。这些量词的每一个或是带有一个下标的 Π 或是 Σ，其意思是布尔式全域中的每一对象被想象为相继代入那个标记，并取所得结果的非关系积（如果量词是 Π）或非关系和（如果量词是 Σ）。量词的次序当然是重要的。因此，

$$\Pi_i \Sigma_j l_{ij} = (l_{11} + l_{12} + l_{13} + 等等) \cdot (l_{21} + l_{22} + l_{23} + 等等)$$

·等等，它的意思是任何东西爱某物。但是，$\Sigma_j \Pi_i l_{ij} = l_{11} \cdot l_{21} \cdot l_{31}$ ·等等 $+ l_{12} \cdot l_{22} \cdot l_{32}$ ·等等＋等等（这里的·即×，表示逻辑乘——引者），它的意思是某物被所有东西所爱。”①

这段话清楚地表明了皮尔士量词理论的要点。他首先用 l_{ij} 表示“名叫 i 的人是名叫 j 的人的情人”，这样，关系词 l（情人）可定义为：

$$l = \Sigma_i \Sigma_j (l)_{ij} (I : J)。$$

关系乘和关系加定义为：

---

① C. P. Vol. 3, 499 — 501 节。

$$(l\,b)_{ij} = \Sigma_x\{(l)_{ix} \times (b)_{xj}\},$$
$$(l \dagger b)_{ij} = \Pi_x\{(l)_{ix} + (b)_{xj}\}。$$

Σ_x 是存在量词，Π_x 是全称量词。量词可以重叠，如 $\Sigma_i \Sigma_j l_{ij}$ 表示"某物是某物的情人"，$\Pi_i \Sigma_j l_{ij}$ 表示"每一东西是某物的情人"。$\Pi_i \Sigma_j(l_{ij} \times b_{ij})$ 表示"每一东西既是某物的一个情人也是一个恩人"。$\Pi_i \Sigma_j(l_{ij} \times b_{ji})$ 表示"每一东西是自己的一个恩人的一个情人"。$\Sigma_i \Sigma_k \Pi_j(l_{ij} + b_{jk})$ 表示"对有的 i 和 k，i 是 k 的一切非一恩人的一个情人"或"对有的 i 和 k，每一 j 是这样一个东西：或 i 爱 j 或 j 是 k 的一个恩人"。

皮尔士对三元关系词也作了同样的处理。例如，令 a 代表三元关系"__对__控告__"，ε 代表"__向__为__辩护"，以下表达式：

$$\Sigma_i \Pi_j \Sigma_k (a_{ijk} \times \varepsilon_{ikj})$$

表示"有一个个体 i，对任一个体 j，总有第三个个体 k，使得 i 向 j 控告 k，并且 i 向 k 为 j 辩护。

在皮尔士的量词表达式中，符号×或·代表合取，可以省略；＋代表析取。

皮尔士制定了量词表达式的一些规则，例如：

1. $\Sigma_i \Pi_j \prec \Pi_j \Sigma_i$

这是说，有一 i 所有 j 蕴涵所有 j 有一 i。这一规则是关于重叠量词的一条基本规则。

2. $\{\Pi_i \varphi(i)\}\{\Pi_j \phi(j)\} = \Pi_i\{\varphi(i)\ \ \phi(i)\}$

$\{\Pi_i \varphi(i)\}\{\Sigma_j \psi(j)\} \prec \Sigma_i\{\varphi(i)\ \ \phi(i)\}$

这是关于有两个量词的表达式与单个量词表达式之间关系的规则。

由以上两个规则，从以下两个前提：

$$\Sigma_h \Pi_i \Sigma_j \Pi_k (a_{hik} + s_{ik} l_{ji}) \quad (1),$$
$$\Sigma_u \Sigma_v \Pi_x \Pi_y (\varepsilon_{uyx} + \bar{s}_{yv} b_{vx}) \quad (2),$$

可以进行推理。

从（2）根据规则 1 可得：

$$\Pi_x \Sigma_u \Pi_y \Sigma_v (\varepsilon_{uyx} + \bar{s}_{yv} b_{vx}) \quad (3)$$

由(3)与(1)根据规则2可得:

$$\Sigma_x \Sigma_u \Sigma_y \Sigma_v \{(\varepsilon_{uyx} + \bar{s}_{yv} b_{vx})(\alpha_{xuv} + s_{yv} l_{yu})\} (4)$$

(4)可根据布尔代数的规律最终得到:

$$\Sigma_x \Sigma_u \Sigma_y \Sigma_v (\varepsilon_{uyx}\alpha_{xuv} + \varepsilon_{uyx} l_{yu} + \alpha_{xuv} b_{vx})。$$

以上所说是皮尔士在1883年建立他的量词理论时的基本思想,1885年他对量词理论又作了发展。他对存在量词和全称量词作了进一步的说明:“为了尽可能展现记法是形象的,我们可以使用Σ代表‘有的’,暗示一种和,用Π代表‘所有’,暗示一种积。因此 $\Sigma_i x_i$ 意为x适用于 i 所表示的个体中的某一个,或者:

$$\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k + \text{等等}$$

同样,$\Pi_i x_i$ 意为x适用于所有这样的个体,或者:

$$\Pi_i x_i = x_i x_j x_k \text{ 等等。}$$

如果x是一个简单关系,那么 $\Pi_i \Pi_j x_{ij}$ 意为每一个i 对每一个j 有这种关系;$\Sigma_i \Pi_j x_{ij}$ 意为某一个i 对每一个i 有这种关系;$\Pi_j \Sigma_i x_{ij}$ 意为对每一个i 有一个i 或其它具有这种关系;$\Sigma_i \Sigma_j x_{ij}$ 意为有一个i 对有一个i 具有这种关系。要注意的是,$\Sigma_i x_i$ 和 $\Pi_i x_i$ 仅仅相似于一种和与一种积;它们并不严格具有那种性质,因为论域的个体可以是不可枚举的。”①这里,皮尔士精确地规定了两种量词的性质及其作用,并明确指出了量词适用的论域(个体域)是无穷的。

皮尔士比较具体地给出了量词演算的一种程序。

第一,把带有不同下标的不同前提写在一起(在两个命题中不使用同样的下标),把所有Π和Σ放到左边。例如,

$$\Pi_i x_i \cdot \Pi_j x_j = \Pi_i \Pi_j x_i x_j$$

$$\Sigma_i x_i \cdot \Pi_j x_j = \Sigma_i \Pi_j x_i x_j$$

$$\Sigma_i x_i \cdot \Sigma_j x_j = \Sigma_i \Sigma_j x_i x_j。$$

---

① C. P., Vol. 3393 节。

第二,不改变任一前提的下标次序,属于不同前提的 Π 和 Σ 可以相互变动，Σ 尽可能放在 Π 的左边。我们有

$$\Pi_i\Pi_j x_{ij} = \Pi_j\Pi_i x_{ij}$$

$$\Sigma_i\Sigma_j x_{ij} = \Sigma_j\Sigma_i x_{ij}$$

$$\Sigma_i\Pi_j x_{ij} \prec \Pi_j\Sigma_i x_{ij}$$

$\Sigma_i\Pi_j x_i y_j \quad \Pi_j\Sigma_i x_i y_j$（在这个公式中，$i$ 和 j 是不同谓词的变目）。皮尔士举了一个例子，如果两个前提的算子是 $\Pi_i\Sigma_j\Pi_k$ 和 $\Sigma_x\Pi_y\Sigma_z$，我们可以把它们联合成以下两种次序之一：

$$\Sigma_x\Pi_y\Sigma_z\Pi_i\Sigma_j\Pi_k$$

$$\Sigma_s\Pi_i\Sigma_j\Pi_y\Sigma_z\Pi_k,$$

由此得到不同的结论。

第三，在量词表达式中的布尔式子可以进行处理，以消去一些可消去的字母，这些字母可被替换为“ __与_ 不同”。例如在以下式子中：

$$a_{ijk}\, a_{xyz},$$

我们可将它替换为：

$$(n_{ix} + n_{jy} + n_{kz}),$$

n 代表“ __与_ 不同”。

第四，量词表达式可进行变形，但其下标要指称同样的对象集合。例如，$\Sigma_w a_w$ 可用 $\Sigma_i(a_i\ _w\ _i)$ 进行替换。

第五，布尔式子进行变形，可以乘上一个布尔式子，这个式子的下标是：把原来布尔式子中与 Π 的下标相同的下标变为与 Π 左边的量词下标相同。例如，$\Sigma_i\Pi_j l_{ij}$ 可以写成 $\Sigma_i\Pi_j l_{ij} l_{ii}$。

第六，在第五步之后，我们可在布尔式子中去掉一个因子或加上一个项。还可根据 $x\bar{x} = f$（假），$x + \bar{x} = V$（真)进行变形。

第七，如果在布尔式子中不再出现一些量词的下标，那么就可去掉这些量词。

第五步往往同第六步和第七步结合在一起作用。例如，从 $\Sigma_i\Pi_j l_{ij}$ 可变为 $\Sigma_i l_{ii}$。

现在我们来看一个应用这些程序的例子：从前提 $\Sigma_i a_i b_i$ 和 $\Pi_j(b_j + c_j)$，消去 b。

首先得到 $\Sigma_i \Pi_j a_i b_i (b_j + c_j)$。

应用分配律得到 $\Sigma_i \Pi_j a_i (b_i \bar{b}_j + b_i c_j)$。

因为我们有权去掉一个因子或插入一个附加的项，所以由上式可得：

$$\Sigma_i \Pi_j a_i (b_i \bar{b}_j + c_j)。$$

在这个式子中，取 i 等同于 j，得到：

$$\Sigma_i \Pi_j a_i (b_i \bar{b}_i + c_i)。$$

根据 $x\bar{x}=f$（假）可得 $x\bar{x}y+z=z$，因此我们可将上式化简为：

$$\Sigma_i \Pi_j a_i c_i。$$

根据第七步可得结论 $\Sigma_i a_i c_i$。

以上程序的核心就是把全部量词挪到前面，后面紧跟布尔式子。皮尔士明确指出：" 学生应当尽可能把 Σ 放在左边，Π 放在右边。"①皮尔士所提出的这种量词表达式，就是后来的斯柯伦前束范式。

皮尔士的量词理论还用于分析同一、差异等第二意念。他对第一意念和第二意念作了如下定义：一个形象记号所体现的概念，能传达肯定的信息，可应用于某些事物但不能应用于其它事物，称为第一意念，如果一个形象记号所体现的概念，本身不能传达任何信息，可应用于一切事物或不应用于任何事物，但它可用来限定其它形象记号，那么这种概念称之为第二意念。"②" 情人"、" 恩人"、" 仆人"等是第一意念的关系词；"_与_不一致"、"_与_同一"、"_与_共存"、"_与_不同"等是第二意念的关系词。

皮尔士说：" 现在让我们来考察用在集合意义上的词项的逻

---

①C. P. Vol. 3, 505 节。

② 同上 433 节。

辑。仅就我们所发展的记法而论，它甚至没有告诉我们怎样表达·两个下标 i 和 j，表示同一个东西。我们可以采用第二意念的一种特殊符号,比如说 I，以表达同一，可以写成 I_{ij}。但是这种同一关系具有特别的性质。第一，如果 i 和 j 是同一的，那么凡是适用于 i 的东西就适用于 j。这可以写成：

$$\Pi_i \Pi_j \{\bar{I}_{ij} + \bar{x}_i + x_j\}。$$

这里使用符号 x 的一般下标表明，公式是属于相似记号的。第二个性质是，如果适用于 i 的每一事物也适用于 j，那么 i 和 j 是同一的。这可以十分自然地写成下式：令符号 q 表示一种质、特性、事实、或谓项对其主项的关系；那么我们所想要表达的属性就是：

$$\Pi_i \Pi_j \Sigma_k (I_{ij} + \bar{q}_{ki} q_{kj})。$$

这样，我们可定义同一性如下：

$$I_{ij} = \Pi_k (q_{ki} q_{kj} + \bar{q}_{ki} \bar{q}_{kj})。$$

即，说事物是同一的就是说每一个谓项对两者都是真的或对两者都是假的。引进一个质概念来表达同一，似乎是绕弯子的；但这个印象将由以下的考虑来修改：$q_{ki} q_{kj}$ 只是意味 i 和 j 两者都在类或集合 k 中。如果我们愿意的话，可借助于使用一个带下标的符号并且在量词中提及这个符号如同被提及的下标，从而消去符号 q。这就是说，我们可以写成：

$$I_{ij} = \Pi_x (x_i x_j + \bar{x}_i \bar{x}_j)。$$”①

在这段话中，皮尔士说 $\Pi_i \Pi_j \{\bar{I}_{ij} + \bar{x}_i + x_j\}$ 是属于相似记号的公式，意思是这是一个公式的模式。q 表示一个特性对主项的关系，或者说类对分子的关系。引进 q 以后，就可用全称量词对“同一”加以定义：

$$I_{ij} = \Pi_k (q_{ki} q_{kj} + \bar{q}_{ki} \bar{q}_{kj})。$$

这个定义概括了同一这个概念的两种性质，并使用了类分子关系。皮尔士接着将这个定义作了变形，通过使用二阶的量词公式消去 q:

$$I_{ij} = \Pi_x (x_i x_j + \bar{x}_i \bar{x}_j)。$$

在这个公式中，全称量词 Π_x 约束的x不是个体变元，而是谓词变元。

综上所说，皮尔士在德摩根之后，发展了德摩根的关系理论，使用了逻辑代数的方法，建立了关系代数，并在关系代数中引入量词理论，提出了逻辑演算的一些重要原理。但是，在数理逻辑发展史上第一个全面系统地建立量词理论的荣誉应当归于弗雷格，他在1879年出版了《概念语言》一书；这本著作的出版标志着数理逻辑的发展由创建时期进入奠基时期。另一方面，我们也必须承认皮尔士的历史功绩，他在1883年发表《关系词逻辑》时是独立于弗雷格的，对皮尔士的成就应当给予公正的评价。

第三编　数理逻辑奠基时期

第九章　逻辑演算的建立和发展

第一节　弗雷格的逻辑演算

弗雷格(G. Frege, 1848一1925)是德国著名逻辑学家、数学家和哲学家。1869一1871年先后在耶拿大学、哥丁根大学学习,1873年获博士学位,1874年起在耶拿大学任教,直到1918年退休。他是数理逻辑的奠基人之一,对数理逻辑有许多创造性的贡献:他在数理逻辑发展史上首先建立了初步自足的逻辑演算和量词理论,第一次给出了自然数的精确定义,在从逻辑推出算术方面做了大量工作,是罗素的先行者。弗雷格的著作很多。其主要专著有《概念语言——一种按算术的公式语言构成的纯思维公式语言》(1879),《算术基础——对数概念的逻辑数学研究》(1884),《算术的基本规律》(第一卷,1893 第二卷,1903) 著名的论文有《函项和概念》》(1891),《论概念和对象》(1892),《论涵义和所指》(1892)。

1879年弗雷格《概念语言》的出版,是数理逻辑发展史上一件具有划时代意义的大事,标志着数理逻辑由开创时期进入奠基时期,标志着数理逻辑的基础部分——命题演算和谓词演算正式建立。

一、逻辑演算建立的历史背景

逻辑演算在19世纪末期建立决不是偶然的。首先,从莱布尼茨以来两百年的逻辑成果,特别是布尔的逻辑代数及其扩充如命题代数、关系代数等,从逻辑上为逻辑演算提供了资料;另一方面,

这些代数的不足，即缺乏严格性，在论证中往往诉诸感性直观，也从反面为新的逻辑演算指明了走向严格性的方向。其次，19世纪的数学发展对逻辑提出了很高的要求。这时数学分析的基础得以初步确立，法国数学家柯西（A. Cauchy）提出了极限理论，德国数学家魏尔斯特拉斯（Weierstrass）提出了ε-δ定义。但是极限理论有一定的缺陷，其中有一条定理"有界单调的数列必有极限"，这是其它一切性质的基础，别的性质都可由它推出。长期以来，人们把上述定理化归为几何，依赖直观。但是几何公理中根本没有讨论到连续的性质，更没有讨论到极限。所以单凭几何直观并不能推出上述定理，看来必须另谋出路。魏尔斯特拉斯在1872年宣布了一个重要结果——存在着处处没有导数的连续函数，或者等价地说，存在着在任何点上都没有切线的连续函数，这与人们的直观发生冲突。人们通常认为，一条连续曲线除了可能在某些孤立的点没有切线外，在其它点必定处处有切线。这就充分说明，在数学推理中不能依靠直观，必须要使用严格的推理。极限理论，连续性、可微性与实数系的性质有关，因此魏尔斯特拉斯提出一个设想：实数理论本身首先应该严格化，然后数学分析的所有概念应由实数理论导出。这就是所谓分析的算术化。19世纪末期，魏尔斯特拉斯及其后继者们使这个设想得到实现，整个数学分析可从表明实数系特征的形式公理系统中逻辑地推导出来。分析的算术化不但推动了数学的发展，确立了分析的实数理论基础，继而又把实数理论化归为自然数理论，而且推动了逻辑形式化的发展。弗雷格正是在这样的时代背景下去建立新的逻辑的。他比分析的算术化方向走得更远，他提出了算术与逻辑同一的纲领，试图从新的逻辑演算推出算术。下面我们首先介绍弗雷格的逻辑演算系统。

二、逻辑演算系统

弗雷格为了实现从逻辑推出算术的纲领，创建了严格的逻辑演算。弗雷格认为，逻辑演算必须要使用严格的形式语言，他称这

种语言为概念语言或表意语言。他明确地表示，他想要创造一种语言来分析数学推理，所以谨慎地避免用布尔改成的代数符号体系。他在对"序列"进行逻辑分析时面临一些困难，主要就是普通语言的不精确性和歧义性，所以他要创立一种新的工具。概念语言是以算术的公式语言为模型的，它与普通语言的关系就好象显微镜和肉眼的关系。弗雷格认为用这种语言进行推理可以觉察隐含的前提和有漏洞的推理步骤，可以使我们最可靠地检验一串推理的有效性。弗雷格还要求他的概念语言具有莱布尼茨在17世纪对哲学演算或理性演算所说的那些优点。弗雷格对概念语言作用的分析，对概念语言同普通语言关系的分析，大大发展了莱布尼茨的创立"普遍语言"的思想,克服了布尔的代数语言的局限性,为现代逻辑的形式语言理论奠定了基础。下面我们来看一看弗雷格逻辑演算系统的要素及其全貌。

（一）断定记号

弗雷格严格区分了对于命题的表达与断定。命题表达思想，指示其真值。我们先要能够表达一个思想，然后才能对它加以断定。他用一条垂直短线加上一条水平短线，表示右方的记号或记号组合(代表命题)是被断定了的(即判断)：

$$\vdash A$$

垂直短线"|"称为判断短线,水平短线"—"称为内容短线。"⊢"是一个断定符号，如果去掉判断短线，那么"—"表示内容短线右方的记号所表达的内容是本人没有加以断定的。"— A"是一个整体，断定是对这个整体的断定。凡在内容短线后面的记号必定表达可断定的内容。例如,"⊢ A"代表"相反的两个磁极互相吸引"这个判断,但"— A"不表达这个判断，只在读者心中产生相反磁极互相吸引的观念。

（二）真值蕴涵和初始联结词

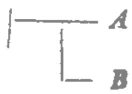
弗雷格对条件联结词作了直值蕴涵的解释。如果A和B代表可断定的内容，那么就有以下四种可能性；

(1) A是肯定的并且B是肯定的；

(2) A是肯定的并且B是否定的；

(3) A是否定的并且B是肯定的；

(4) A是否定的并且B是否定的。



这个符号表示以下判断：第三个可能性不发生，而其余三个可能性中的每一个实现。他把联结两条水平短线的垂直线称为条件短线。显然，以上公式就是现在的 ⊢ B→A”(即B蕴涵A)。这里，弗雷格明确地引进了实质蕴涵的真值表，并把实质蕴涵符号作为一个初始联结词。



这个符号表示：“ A不出现”，这就是A的否定，即⊢ ¬ A。断定符号下面的垂直短线称为否定短线。否定词是另一个初始联结词。把内容短线，条件短线和否定短线以各种方式组合起来，就可以表达其它联结词。例如，



意为‘ B肯定而A的否定被否定这种情况不发生”，即‘ 既肯定A又肯定B的可能性不存在”。上述公式用现代符号可写成：⊢ B →¬ A(如果B那么非一A)，这个公式只有在以下三种情况中是真的：

A是肯定的并且B是否定的；

A是否定的并且B是肯定的；

A是否定的并且B是否定的。



这个公式表示 

被否定”，即‘ 既肯定A又肯定B的情况

出现”。这个公式写成现在的形式就是 $\vdash \neg(B \to \neg A)$ 即 $\vdash B \wedge A$（B并且A）。它在上述三种情况下是假的。



表示“A否定而B的否定被肯定的情况不出现”，或“A和B不能都被否定”，它在以下三种情况下为真：

A是肯定的并且B是肯定的；

A是肯定的并且B是否定的；

A是否定的并且B是肯定的。

由上可见，  这个公式写成现在的形式就是 $\vdash \neg B \to A$（如果非B则A），即 $\vdash B \vee A$（B或A），这是相容性析取。

（三）符号≡的涵义

弗雷格在《概念语言》中，把“≡”看成是两个名称之间的关系，它是表达内容同一的符号。弗雷格说：“$\vdash (A \equiv B)$ 意为：记号A和记号B具有同样的概念内容，使得我们总能用B替换A，反之亦然。”①弗雷格的这种说法很不精确，后来，他把“概念内容”这一概念分成“涵义”和“所指”，把符号≡改为=。=不被看成两个名称之间的关系，而是看成名称的所指之间的关系。=用于专名的所指，相当于等词；用于命题的所指（真值），相当于等值符号 $\longleftrightarrow$。后面我们将专门论述弗雷格的涵义和所指的学说。

（四）函项和量词

引进函项和变目的概念来代替传统的主项和谓项的概念，这是弗雷格的一大贡献。他说：“如果在一个表达式中（表达式的内容不一定可变成一个判断），一个简单的记号或复合的记号有一个或

---

①《概念语言》§8。《概念语言》英文本载J. van Heijenoort编的From Frege to Gödel (Harvard University Press, 1977)，以下引证此书简写为F·G。

多个出现，并且如果我们把那个记号看成是可用某个其它记号替换那个记号的所有出现或有的出现（但每一个地方是用同样记号替换），那么我们把在表达式中保持不变的部分叫做函项，把可替换的部分叫做函项的变目。”①他后来在《函项和概念》中说：“函项本身必须称之为不完全的，需要加以补充，或者说，它是‘未饱和的’。”②弗雷格所说的“函项”实际上是函项关系或函项运算，他的用词不太精确。严格说来，函项运算是指φ或φ（ ），具有空位，意义不完整，用弗雷格的话来说,函项运算具有“未饱和性”,但它是确定的；函项是指φ(x)，含有变元x，是不确定的。弗雷格的用词虽不太精确，但他的论述还是清楚的。他在《函项和概念》(1891)、《算术的基本规律》(第一卷,1893)和《什么是函项》(1904)等著作中对函项和函项运算又作了进一步的论述，他引进了变目空位的概念，并用小写希腊字母ξ等表示变目空位。他说：“这种对完整性的需要可用空括号来表明,例如‘sin( )’或‘( )² + 3( )’。这也许是最适当的记法,最适宜避免把变目记号当作函项记号一部分所产生的混乱；但很可能它不被接受。一个字母也可用于这个目的。如果我们选用‘ξ’那么‘sin ξ’和‘ξ² + 3ξ’就是函项记号。但是在这样的情况下必须规定：‘ξ’在这里所做的唯一事情就是表明所要填入的记号必须插进的空位。”③

弗雷格在这里所说的“函项记号”就是函项运算，这比用“函项”这个词来表示函项运算要精确。由上可见，弗雷格明确地定义了“函项记号”（即函项运算），他没有把φ（ ）和φ(A)当成一个东西。弗雷格在《概念语言》中把φ(A)称为变目A的不定函项，同样ψ(A, B)是变目A和B的不定函项。④总之，我们有充

---

①F. G. P. 22.

②Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege (New York, 1952) p. 24. 以下引证此书缩写为 P. W. F.，

③同上 p. 114.

④F. G. p. 23.

分根据可以断言，弗雷格在数理逻辑发展史上，也是在数学发展史上，第一次对函项运算的本质作了科学的规定。近代数学严格区分函项运算和函项，把函项运算从函项中独立出来，并独立地进行研究，形成了算法理论或可计算性理论。我们应该说，可计算性理论的鼻祖是弗雷格。

弗雷格定义的函项运算是广义的，但他在研究逻辑时的函项限于命题函项。他在《概念语言》中把函项的值限于命题，或者说，“可能变为判断的内容”。他这时还没有提出“命题的所指即真值”的理论，因此上述命题函项是内涵命题函项。他在1892年发表《论涵义和所指》以后，才明确指出函项的值取命题真值的思想，这就是后来所说的外延命题函项。在外延命题函项中，他注重一元的和二元的两种。他把一元函项运算叫做概念，取值是真值：“一个概念是一个其值总为真值的函项。”①例如，“1的平方根”是一个概念，与它相对应的函项是 $\chi^2=1$，实际上应是函项运算 $(\ )^2=1$。一元函项 $\Phi(A)$ 读为：“A有特性 Φ”，$\Phi(\ )$ 是一元函项运算，表示“__有特性 ϕ”，含有一个空位，弗雷格称它为“概念”，也就是现在所说的一元谓词。二元函项 $\Psi(A, B)$ 读为：“B对A有关系 ψ”或“B是把程序 ψ 应用于对象A的结果”。弗雷格把 ψ [即带两个空位的 $\psi(\ ,\ )$] 的叫做关系或程序，可见他把 ψ 或 $\psi(\ ,\ )$ 同不定函项 $\psi(A, B)$ 作了区分，关系 ψ 或 $\psi(\ ,\ )$ 是二元谓词。弗雷格提出的函项理论的一个主要目的就是把它应用于量词理论，他实际上把现在所说的“谓词”看成是带有空位的函项运算。

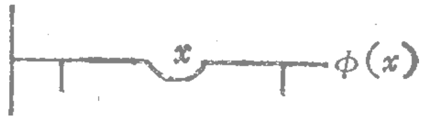
在函项理论的基础上，弗雷格在数理逻辑发展史第一次引进了全称量词和存在量词。



---

①P. W.F. p. 30.

代表以下判断：不管我们对函项的变目取何种东西，函项是一个事实。这就是说，对所有 x 而言，x 是 ϕ，即 $(\forall x)\phi(x)$（弗雷格原来用德文字母表示变目）。在他的系统中，全称量词是基本的，存在量词由全称量词加以定义。



这个公式是说：并非所有 x 都不是 ϕ，即有 x 是 ϕ，用现代的符号表示就是：

$\neg(\forall x)\neg\phi(x)$ 即 $(\exists x)\phi(x)$。

（五）一阶谓词演算的公理和规则

公理有9条。在《概念语言》一书中，这九条公理的编号分别为(1),(2),(8),(28),(31),(41),(52),(54)和(58)。为方便起见，我们用现在通行的符号把他的九条公理改写如下（公理前省去了断定符号，为了同他的编号相区别，我们的编号用方括号）：

[1] $p\rightarrow(q\rightarrow p)$，

p 蕴涵（q 蕴涵 p），即任何命题蕴涵真命题，这是一个怪论。

[2] $(p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r))$，

这是蕴涵词的分配律，从 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 可得 $(p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r)$。

[3] $(p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow(q\rightarrow(p\rightarrow r))$，

这是前件交换律，从 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 可得 $q\rightarrow(p\rightarrow r)$。

[4] $(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$，

这是易位律，从 $p\rightarrow q$ 可得 $\neg q\rightarrow\neg p$。

[5] $\neg\neg p\rightarrow p$，

[6] $p\rightarrow\neg\neg p$，

[5] 和 [6] 是两条双重否定律。

[7] $(a=b)\rightarrow(F(a)\rightarrow F(b))$，

这是同一的东西不可分辨性原理，从 $a=b$ 可得 $F(a)\rightarrow F(b)$。

[8] a=a，

这是等词的同一律。

[9] ($\forall$x) F(x) →F(a)，

这是全称消去律，从所有x是F可得a是F。

除公理外有四条变形规则。第一条是分离规则，弗雷格说：“从  和 ⊢ B 得到新判断 ⊢ A.”①这就是说，从B→A和B可得A。第二条是代入规则，弗雷格在推演中使用了，但没有加以严格陈述。第三条是后件概括规则，弗雷格说：“也很显然，从  我们可以推出  ，如果a不在表达式A中出现并且a仅在φ(a)的变目位置上。”②这就是说，从A→φ(a)可推出A→($\forall$x) φ(x)，假定a不在A中出现并且仅在φ(a)的变目位置上。第四条是后件限制规则，从B→(A→φ(a))可推出B→(A→($\forall$x) φ(x))，假定a不在A或B中出现，φ(a)中的a仅处于变目位置上。③这是第三条规则的推广，弗雷格认为，这条规则可化归为第三条规则，因而原则上可以省略。化归的方法是，将B→(A→φ(a))变形为(B∧A)→φ(a)，然后用第三条原则得到(B∧A)→($\forall$x) φ(x)，再变形为B→(A→($\forall$x) φ(x))。

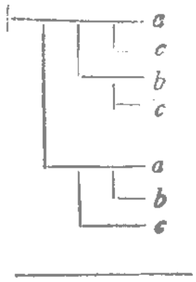
弗雷格在这个公理系统的基础上，进行了大量推导，得出了许多定理。公理[1]-[6]，推理规则1和2构成命题演算系统，它是一阶谓词演算的子系统。下面我们看一个推导的例子。

---

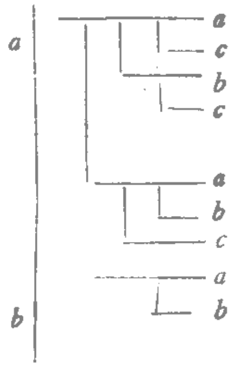
①F. G. pp. 15—16.

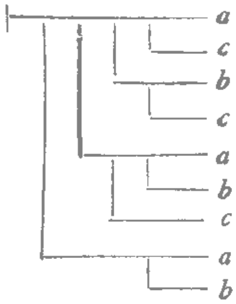
②同上，p. 26。

③同上。

(2) 

(1):





(3)

数字2指明公式(2)在它的右边，上面的推导是从(2）和(1)推出(3)的缩写。数字(1)下面的表是说，在公式(1)中，以公式(2)代入a，以  代入b。公式(1)原来的形式是：



经过代入以后，公式(1)变为一个相当复杂的公式，第一个前件就是公式(2)，根据分离规则，分离掉(2)，这样就得到(3)。公式(1)和公式(2)是公理，公式(3)是从公理(1)和(2)得到的定理。

由上可见，弗雷格的推导是严格的。他虽然没有陈述代入规则，但在实际的推导中应用了它，列出了代入表。

弗雷格的系统是完全的，但不具有独立性。波兰著名逻辑学家卢卡西维茨(Łukasiewicz）在1936年证明：弗雷格原来的公式(8)(第三条公理)可从前两条公理推出。实际上，两条双重否定律和第四条公理[原公式(28)]也可从前两条公理和公式($\neg p\rightarrow\neg q)\rightarrow(q\rightarrow p$)推出。因此，弗雷格的命题演算可简化成三条公理，在现代的一些数理逻辑教科书中，如哈密尔顿的《数学家的逻

辑》，①就采用了弗雷格的第一、二两条公理和上述的一条新公理作为命题演算公理。

弗雷格在陈述他的公理系统时，还区别了对象语言和元语言。他把公理和定理称为"纯思想的判断"，把推理规则称为"运用我们符号的规则"，"这些规则……不能在概念语言中表达，因为它们是这语言的基础。"②他在讨论对象语言而不是使用对象语言时，用大写希腊字母A, B, T, Φ, Ψ，和X，这些字母实际上就是语形变元。

总之，弗雷格在数理逻辑发展史上第一次构造了命题演算和谓词演算的形式公理系统；对形式语言的本质，对象语言和元语言的区别，以及函项的本质，都作了科学的规定。弗雷格逻辑演算系统的建立标志着数理逻辑的基础已经牢固地奠定，他的功绩是前无古人的。

（六）高阶谓词演算

上述系统是在《概念语言》中给出的，这时他还没有明确区别一阶逻辑同二阶的和高阶的逻辑。例如，他在推导定理（91）时使用了二阶的后件限制规则，但引用的却是相应的一阶后件限制规则。他在推导定理（77）和（93）时，使用了二阶的判断，但引用的却是相应的一阶判断。他当时认为，二阶判断可从一阶判断用推理规则得到。他实际上并没有混淆它们。后来，在《函项和概念》、《算术基础》和《算术的基本规律》等著作中，他明确提出了"第一层函项"和"第二层函项"的区别。第一层函项的变目是对象，所谓对象就是指不是函项的东西，没有变目空位，主要是指个体。第二层函项就是函项的函项，其变目是函项。例如，在$M_{\beta}(F(\beta))$中，M_{β}就是第二层函项，其变目是F（弗雷格所说的第二层函项，严格说来，是第二层函项运算）。与此相应，弗雷格把"概念"分为第

---

①哈密尔顿：《数学家的逻辑》，商务印书馆，1989年出版，第37—38页。

②F. G. p. 28.

一层概念和第二层概念。

他在《算术的基本规律》中，建立了了另一个逻辑系统——二阶谓词演算。在介绍这个系统的公理之前，我们先说明一些有关的概念。

弗雷格根据涵义和所指的理论，把内容短线看成是一个真值函项——△，当△本身指示真的时候，——△指示真，否则指示假。当△是一个真命题时，—— △指示真,当△是假命题或根本不是命题时，—— △指示假。—┬— △指示同—— △相反的真值。如果A是一个命题，则——A是A的真值。如果在—— A的前面加上判断短线，即变为├——A，那么我们就说——A事实上是真的，从而断定了A。弗雷格引进了以下公式：

—— A= —— B，

它是说：A的真值等于B的真值；这个公式相当于现在的公式：

A ⟷ B，

即A等值于B。

如果两个命题函项F(ξ) 和 G(ξ)（ξ 代表空位）对同样的变目有同样的真值，我们就说它们有同样的域。弗雷格用 ἐF(ε) 代表 F(ξ) 的域。F(ξ) 的域实际上分成两个类：1. F(ξ) 对之取真为值的那些变目所组成的类，2. F(ξ) 对之取假为值的那些变目所组的类（补类）。一般我们只说前一个类。因此，域 ἐF(ε) 就是命题函项 F(ξ) 的外延，用后来罗素的记法就是 x̂F(x)（具有性质F的x所组成的类）。例如，设F(ξ) 代表 ‘ξ 是人,,它的域 ἐF(ε)就是人类。所以，域就是从内涵方面定义的类。

与域有关，弗雷格引进了表示定冠词的函项符号＼ξ，这实际上就是确定的摹状词符号，斜线放在代表域或类的符号的左边。如果这个域有唯一的分子，则＼ξ就是这个分子；如果没有唯一的分子，则＼ξ就是这个域本身。弗雷格说：“ 我们可以通过引进函项＼ξ，区别两种情况：(1)如果相应于变目ξ，有一个对象△，使得 ἐ(△= ε）是变目，那么函项＼ξ的值是△本身;(2）如果相应

于变目ξ，没有一个对象△使得 $\dot{\varepsilon}$(△= ε）是变目，则变目ξ本身就是函项＼ξ的值。因此，如果φ(ξ)是恰好有一个对象属于它的概念，那么＼，(△= ε）=△是真的，‘＼$\dot{\varepsilon}$φ(ε)’代表属于概念φ(ξ)的对象 在所有其它情况下，，‘＼$\dot{\varepsilon}$φ(ε)，代表与‘$\dot{\varepsilon}$φ(ε)，相同的东西。例如，2=＼$\dot{\varepsilon}$(ε＋3=5)是真的，因为2是属于概念‘加3产生5的东西’的唯一对象。”①＼$\dot{\varepsilon}$φ(ε)相当于罗素的确定摹状词符号(ιx)φ(x)(读为：那个具有性质φ的x)。

我们现在来陈述弗雷格的新系统：

Ⅰ. p→(q→p）和p→p。

Ⅱa. (∀x)F(x) → F(a) 。

Ⅱb. (∀F)M$_\beta$(F(β))→M$_\beta$(F(β))。

F是第一层函项，M$_\beta$是第二层函项。这条公理是Ⅱa的推广，由谓词推广到谓词的谓词。

Ⅲ. G(a=b) → G[(∀F)(F(a）→ F(b))]，

这是一阶系统中第七条公理的推广。

Ⅳ. ¬(A ←→ ¬B) → (A←→ B) ，

这是说，(并非A等值于非B)蕴涵A等值于β。

Ⅴ. ($\dot{\varepsilon}$F(ε) = $\dot{\alpha}$G(α))←→((∀x)(F(x)←→G(x))，

这是说，(具有性质F的东西组成的类等于由具有性质G的东西组成的类）等值于对一切x而言，x是F等值于x是G。

Ⅵ. a=＼$\dot{\varepsilon}$(a= ε)，

a是类$\dot{\varepsilon}$(a= ε）的唯一分子，函项＼e(a= ε)的值等于a。

在这个新系统中，除分离规则和代入规则之外，弗雷格还把原来系统中的一些公理和定理作为新的推理规则。增加推理规则有助于进行推演。这一系统处理命题演算，谓词演算，类理论(类是

---

①HFL, p. 368.

一元命题函项的域)和关系理论(关系是二元命题函项的域),更重要的是进行了推导算术的工作，推出了若干算术定理。

三、自然数的定义

要从逻辑推出算术，首先必须给自然数下定义。弗雷格成功地用逻辑的概念定义了自然数。在陈述弗雷格的自然数定义之前，我们先看一看弗雷格对定义的要求。他陈述了七条规则：①

1．由已知的名称正确地构造起来的每一名称必有一个所指，否则关于记号的适用性就不能确定。

2．同样的记号不可以用两种不同的方式加以定义，因为两个定义是否一致这个问题是会引起怀疑的。

3．被定义的名称必须简单，即不是由其它被定义名称组成的，否则对这些名称的解释是否一致这个问题是会引起怀疑的。

以上三条是一般的。以下四条与他的系统有关：

4．由定义引进的一个专有名称在它的一切出现之处可用定义者替换，它决不可用作一个函项名称，因为这样的用法不可能回到初始名称。

5．对于带一个变目的第一层函项所引进的一个名称必须只包含一个变目空位，因为如果有几个变目空位的话，那么它们就可填以各种各样的结果，使得这个名称会代表有几个变目的函项。在定义中定义者的一切变目空位必须填以用来指示被定义者变目空位的同一个斜体字母

6．同样，对于带两个变目的第一层函项所引进的一个名称必须包含两个并且仅仅两个变目空位。在定义中，定义者的一切相关的变目空位必须被填以用来指示被定义者两个变目之一的同一个斜体字母；不相关的变目空位必须填以不同的字母。

7．一个定义在两边中的一边决不可包含有另一边不出现的一

---

①《算术的基本规律》，第一卷 §33，转引自涅尔：《逻辑学的发展》第636—637页。

个斜体字母。如果对定义者中的斜体字母代入专有名称的结果把定义者变为适当地构造起来的专有名称，那么根据系统的规定，作为被定义者出现的函项名称总有一个所指。

弗雷格所说的‘专有名称”指个体，斜体字母指自由变元。弗雷格对定义提出这些要求，为的是使定义具有严格性，从而使推理也具有严格性。自然数就是按这些要求严格定义出来的。

在《概念语言》第三章中，弗雷格从逻辑上定义了与序列有关的一些重要概念，为以后定义自然数及说明数学归纳法，作了理论和技术上的准备。这里讨论的是比较一般的归纳法形式。他首先对二元函项 $f(\Gamma, \triangle)$ 作了说明，$\vdash f(\Gamma, \triangle)$ 可以读为：

1.不管 Γ，△是什么，也不管关系 f 是什么，Γ 对△有 f 关系或者：

2.不管 Γ，△是什么，也不管程序 f 是什么，△是把程序 f 应用于 Γ 的结果。

可见，弗雷格对函项、关系、程序的理解是广义的。他认为上述两种理解是同义的。看来,弗雷格倾向于用‘程序’这个概念,因为在定义数学归纳法时需要它；对一个整数加上一个程序就得到了它的后继。

根据弗雷格的看法，所谓序列就是由任一个二元关系所决定的彼此相关的若干实体。弗雷格所理解的序列是相当广泛的，不一定象一串珠子或自然数所形成的那种线性序列。序列可以是环状的,或树枝形的,等等。

弗雷格在说明了函项和序列之后，接着定义了‘遗传性，：如果 x 有性质 F，那么同 x 有 f 关系的每一对象也有性质 F；或者，如果 x 有性质 F（不管 x 是什么），那么总能得出：把程序 f 应用于 x 的每一结果有性质 F；这就是说，“性质 F 在 f 序列中是遗传的”。①有了遗传性的概念，弗雷格接着定义了“y 在 f 序

①F. G. p. 57.

列中是x的后裔”:“ 如果从以下两个命题:1. 把程序f应用于x的每一结果有性质F, 2. 性质F在f序列中是遗传的,可以推出:不管F是什么,y有性质F,那么我就说:‘y在f序列中是x的后裔’,或‘x在f序列中是y的前趋。”①“ y属于从x开始的f序列”意为:y与x同一,或y在f序列中是x的后裔。②

以上概念的定义都是纯逻辑的。弗雷格后来在《算术基础》一书中,发展了这些思想,完成了自然数和数学归纳法的定义。他的定义的核心在于使用了一一对应的概念;

属于两个概念F和G的对象借助关系ϕ一一对应,当且仅当:1. 每一个属于概念F的对象对属于概念G的一个对象,有关系ϕ;2. 对属于G的每一个对象,存在一个属于F的对象,与前者有关系φ; 3. 对所有x, y, z而言,如果x对y有关系φ, x对z也有关系φ,那么y和z就是同样的;4. 对所有x,y,z而言,如果x对z有关系ϕ, y对z有关系φ,那么x和y就是同样的。③

这样定义的“一一对应”是不用“一”这个数的,因此,弗雷格认为,这里没有恶性循环。在此基础上,他构造了以下三个定义:

1.“ 概念F同概念G是等数的”意为“存在一个关系ϕ,使得属于概念F的对象与属于概念G的对象一一对应”。

2. 属于概念F的数是“同概念F等数”这个概念的外延;

3.“ n是一个数”意为“存在一个概念,使得n是属于这个概念的数”。

弗雷格根据以上定义,具体地定义了0:

0是属于概念“不同于自身”的数。

这里,“ 不同于自身”是一个逻辑概念。上述概念等于说,0是“与概念‘不同于自身’等数”这个概念的外延。用集合论的术语来

---

① 同上, p. 60.

② 同上, p69.

③《算术基础》英译本 The Foundations of Arithmetic (J. L. Austin译),Oxford, 1950, § 71 和 72。以下此书缩写为 F. A 。

说,概念 不同于自身 '是一个空集合'; 同概念 ' 不同于自身 ' 等数 "这个概念是指和空集合相等价的集合(所谓等价就是有 一一对应关系），其外延就是由空集合产生的集合，即所有等价于空集合的集合所构成的等价类。这个等价类的特性是，其中的任一集合与空集合等价，即其中的所有集合都没有元素。我们把空集合记为φ，其等价类记为[φ]。根据弗雷格的定义，0是属于空集合的数，而 属于空集合的数 '就是 与空集合等数 '这个概念的外延,即空集合的等价类。

接着，弗雷格把' n在自然数序列中是m的直接后继 " 定义为：" 存在一个概念F和一个归于它的对象x，使得属于概念F的数是n，属于概念 ' 归于F但不同于x的数是m。 " ①这实际上是后继函数的定义。下面我们看一看如何从0和后继函数产生1。②我们先考虑概念(或谓词) 同于0 "。 0归于这个概念。但没有一个对象归于概念' 同于0但不同于0 "，所以，0是属于这个概念的数。因此，我们有一个概念' 同于0 " 和一个归于它的对象0，使得以下两命题为真：

属于概念' 同于0但不同于0 " 的数是0; 属于概念 同于0 '的数在自然数序列中是0的直接后继。因此，如果我们采用以下定义：

1是属于概念' 同于0 "的数,那么,我们就能把上述结论表述为：

1在自然数序列中是0的直接后继。

根据弗雷格的论述，有以下定义：

2是属于概念' 同于0或同于1 " 的数，

3是属于概念' 同于0或同于1或同于2 " 的数,如此等等。

也就是说，2在自然数序列中是1的直接后继，3在自然数序列中是2的直接后继，……

---

①F. A §76.
②F, A §77,

弗雷格指出,他的数与康托尔集合论中的"势"或"基数"是同样的。两个概念等数，就是两个集合等价。概念"与概念F等数"的外延，就是与集合F等价的一切集合构成的集合(即F的等价类)。"属于概念F的数"意为：集合F的基数。根据弗雷格的定义，一个集合F的基数就是与集合F等价的一切集合构成的集合(F的等价类)。这实际上是说，F的基数就是与F等价的一切集合的共性，而与F等价的一切集合的集合就是由这个共性确定的。简单地说，一个集合的基数就是等价集合的集合。

由上可见，弗雷格所一般定义的数，实际上是集合的基数。他所定义的自然数就是一些具体的集合的基数，例如，0是空集合的基数。这样，自然数也被定义为等价集合的集合，或类的类。弗雷格的后继函数的定义实际上是说，后继函数把等价集合的集合m映射到一个新的集合的集合f(m)(即n)，f(m)中的每一个集合是由在m中的某一集合加上一个新分子而得到的。这样，对自然数序列中的每个数，有一个直接后继的数。自然数就由0和后继函数确定下来了。弗雷格的自然数定义是十分精确的。我们用 $\bar{\bar{A}}$ 表示集合A的基数，由弗雷格的定义可知，$\bar{\bar{A}}$ 也就是A的等价类[A]。弗雷格实际上采用了以下定义：

$0=df.\ \bar{\bar{\varnothing}}=[\Phi]$，

$1=df.\ \overline{\overline{\{0\}}}=[\{0\}]$，

$2=df.\ \overline{\overline{\{0,1\}}}=[\{0,1\}]$，

$3=df.\ \overline{\overline{\{0,1,2\}}}=[\{0,1,2\}]$，

……

弗雷格以上所给出的自然数的归纳定义是从《概念语言》中的"后裔""前趋"的概念发展而来的。"y在f序列中是x的后裔"是普遍的归纳法形式，把它用于自然数，就可以说，自然数n是0的后裔。所以,弗雷格在《算术基础》中先给出一般数(基数)的定义,

然后给出 $_0$ ’和 直接后继 ’的定义,对《 概念语言》中 后裔 ’的概念作了发展，从而完成了自然数的定义。我们应注意的是，自然数是有穷数,所以弗雷格在《 算术基础》中给出了 有穷数 ’的定义“:命题$_n$是从$_0$开始的自然数序列的一个分子，意为‘ $_n$是一个有穷数,。”①按照《 概念语言》中的定义“; $_n$是从$_0$开始的自然数序列的一个分子 ” 意为‘ $_n$在自然数序列中是$_0$的后裔，或$_n$与$_0$相同。

弗雷格的自然数定义后来被罗素所采纳，罗素在陈述时有所改进。

现代集合论中的自然数定义是冯 ·诺意曼(von Neumann)在1924年提出的，他的定义如下：

$0=\Phi$，

$1=\{0\}=\{\Phi\}$,

$2=\{0, 1\}=\{\Phi, \{\Phi\}\}$，

$3=\{0, 1, 2\}=\{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\varnothing\}\}\}$,

……

把这个定义加以严格表述即成为集合论中的标准定义。这个定义比弗雷格的定义有所改进，但它们的指导思想有类似之处。冯诺意曼把每一自然数看成是所有较小自然数的集合（ $_0$则等同于空集合），弗雷格把$_0$定义为空集合的集合，每一自然数是所有较小自然数集合的集合。这里的区别是，弗雷格的定义使用了等价类，而冯诺意曼的定义则选用了等价类的一个标准的代表。可见，弗雷格的定义为现代的自然数定义奠定了基础。

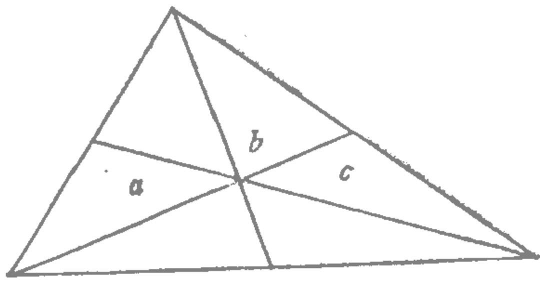
四、涵义和所指

弗雷格的逻辑系统与涵义、所指的学说有密切联系。

在《 概念语言》中，弗雷格把‘ ≡ ” 理解为在表达式之间内容同一的一个符号。他在进一步的研究中，认识到这种‘ 内容同一 ” 的

①F. A §83.

说法在逻辑上是有困难的，这是把某些对象在客观上同一归于某些短语内容的同一。在《算术的基本规律》一书中，他把"≡"改为"="，这种改变的理论基础就是涵义和所指的区别。在《算术的基本规律》(第一卷，1893)出版前一年，他发表了《论涵义和所指》的论文。在这篇论文中，不是一般地谈内容，而是对涵义和所指作出了明确的区别。弗雷格举了一个三角形的例子。



设a，b，c是连结三角形顶点和对边中点的线段(即三条中线)，它们有一个共同的交点。a和b的交点同b和c的交点是同一的，这就是说，表达式"a和b的交点"同表达式"b和c的交点"的所指是同样的，但它们的表述方式也就是涵义是不同的。弗雷格把记号所指示的东西叫做记号的所指；把记号所包含的表述方式，或者说，记号所表达的东西，叫做记号的涵义。再如，"昏星"的所指与"晨星"的所指是同样的，但其涵义不同。

弗雷格把"记号"、"名称"等叫做专名，这也包括后来所说的摹状词。他指出，有一类名称，如"最小的快速收敛级数"，"离地球最远的天体"，具有涵义，但没有所指。但是，他认为这种专名只出现于不完善的自然语言中；在完美的逻辑语言中，每一专名不但有涵义，而且也有所指。弗雷格说："一个专名(字，记号，记号组合，表达式)表达它的涵义，代表或指示它的所指。我们用一个记号表达它的涵义，指示它的所指。"①

弗雷格进一步把记号的涵义和所指的理论推广到陈述句上，

①P. W F. p. 61.

也就是推广到命题上。他把真值，即真和假当作抽象的对象，认为所有真命题有同样的所指——真，所有假命题也有同样的所指——假。命题的涵义是命题所表达的思想，即思维的客观内容，这是思维者共同具有的。他说："所谓语句的真值是指这样的情况：它是真的或假的。没有其它任何真值。为简单起见，我称一个为真，另一个为假。每一个涉及其语词所指的陈述句就被看成是一个专名，它的所指(如果它有的话)或是真或是假。"①一个语句的涵义和所指不同，涵义是思想，所指是真值，真值不能是思想的一部分。

弗雷格提出了一个著名的外延论题：命题的所指是它的真值，当某个命题的一部分用具有同样所指但有不同涵义的表达式去替换时，命题的真值保持不变。②他多次强调了这一论题，并举例作了说明。例如，从"晨星是太阳所照耀的物体"，经过替换变为："昏星是太阳所照耀的物体"，其真值不变，但思想却改变了，因为不知道昏星就是晨星的人，以为一个语句是真的，另一个是假的。弗雷格说："如果 $a=b$，那么'b'的所指确实与'a'的相同，因此'$a=b$'的真值与'$a=a$'的真值相同。然而，'b'的涵义也许不同于'a'的涵义，因此，由'$a=b$'所表达的思想不同于'$a=a$'。"③例如"晨星=昏星"和"晨星=晨星"的真值相同，但表达的思想不同。"$2^2=4$"和"$2>1$"都指示真，它们是等值的。弗雷格解释说："反对意见提出，'$2^2=4$'和'$2>1$'是完全不同的断定，表达了完全不同的思想，但是，'$2^4=4^2$'和'$4\cdot4=4^2$'也表达了不同的思想，然而我们可用'$4\cdot4$'替换'2^4'，因为这两个记号有同样的所指。可见，从所指的同一推不出所表达的思想的同一。如果我们说'昏星是公转周期小于地球公转周期的一颗行星'，那么我们所表达的思想就是与下述语句不同的另一种思想：'晨星是公

---

①P. W.F. p. 63.
② 同上，p. 62, p. 64 p. 65.
③ 同上，p. 78，

转周期小于地球公转周期的一颗行星’；因为不知道晨星是昏星的人也许认为一句话是真的，另一句话是假的。上述两句话必有同样的所指，因为它们只是交换了语词‘晨星’和‘昏星’，而‘晨星’和‘昏星’有同样的所指，也就是说，它们是同样天体的专名。我们必须区别涵义和所指。‘2^4’和‘4^2’确实有同样的所指，即它们是同样的数的专名，但它们没有同样的涵义，因此，‘$2^4=4^2$’和‘$4\cdot 4=4^2$’有同样的所指，但没有同样的涵义，这就是说，在此情况下，它们并不包含同样的思想。”①

弗雷格的外延论题对从真值角度来考察的复合命题也是适用的。他举了一个例子：“如果太阳已经升起来了，那么天空就是阴沉的”，在这个假言命题中，条件子句“太阳已经升起来了”表达一个完整的思想，因为其中包含一个专名。这个假言命题断定了不出现前件代表真后件代表假的情况，所以弗雷格认为，“由于这里只考虑真值，因而每个组成的子句可被另一个具有同样真值的子句所替换而不改变整个句子的真值。”②

弗雷格进一步研究了他的外延论题不适用的情况，这些不适用的情况并不表明外延论题不成立，而只是表明它们不符合外延论题的条件。为说明这个问题，他首先提出了加引号名称具有间接所指的理论。他说：“如果我们以普通方式使用语词，那么我们所想说的就是它们的所指。但也可能发生这样的情形：人们希望谈到语词本身或它们的涵义。例如，当引用另一个人的语词时就是如此。人们自己的语词首先指示另一个说话者的语词，只有后者才有它们普通的所指。我们有记号的记号。在书写时，这样的语词要加引号。因此，带引号的语词不可看成有普通的所指。”③这样的语词具有间接所指。我们可用一个简单的例子说明弗雷格的思想。在“北京是中国的首都”这句话中，“北京”有普通的所指；

① P. W. F. p. 29.

② P. W. F. p. 74.

③ 同上，pp. 58—59.

但在"北京是两个字"中,"北京"是名字的名字,是用"北京"这个名字指示"北京"这个名字,这是所谓"自名用法",弗雷格采用加引号的办法,上述语句应写为:"'北京'是两个字"。在这句话中的"北京"不是指示中国的首都这个地方,而是指示"北京"这个名字。在这样的情况下,不能使用外延论题。我们不能把"'北京'是两个字"变为"'中国的首都'是两个字"。弗雷格把上述原理推广去研究带有子句的各种复合语句。例如,"哥白尼相信:地球的轨道是圆的",①这个复合语句的真假不依赖于哥白尼所相信的东西的真假,即不依赖于子句的真假,而只依赖于他是否相信子句所表达的思想。在这里,子句中的话是间接引语,子句可以被看成一个名词,根据上述的记号的记号理论,子句没有普通的所指——真值,而只有间接所指(也就是子句的普通涵义)——思想。由于子句的真值与整个语句的真值无关,我们可以把上述语句变为:哥白尼相信:太阳的外观上的运动是由地球的真实运动产生的",其真值不变。可是,,第一个子句是假的,第二个子句是真的。弗雷格指出,除了以上关于"相信"的子句外,同样的考虑还可应用于"知道"、"发现"、"已知"等表达式,以及在"命令"、"要求"和"禁止"之后的子句,还有象"我不清楚是否……"这样的间接疑问句等。凡是由上述这些语词构成的复合句,不能应用外延论题,因为其子句没有普通的所指——真值,只有间接所指——思想。从弗雷格的这些论述,我们可以清楚地看出,二值外延逻辑同"相信"、"知道"的逻辑是根本不同的。弗雷格不但建立了一个完全的二值外延逻辑系统,而且从理论上揭示了关于"相信"、"知道"等逻辑的根本特点,即不能应用外延论题,这些逻辑后来称为内涵逻辑。弗雷格为内涵逻辑的建立指明了方向。

除了间接所指不能应用外延论题的情况之外,弗雷格还探讨了其它情况。一种情况是,语句中含有不定指示词,而不是专名。

---

①在英语中,子句由'that'引导。

例如“因为冰比水有较小的密度,所以它浮在水上”,这句话有三个思想：

（1）冰比水有较小的密度；

（2）如果任何东西比水有较小的密度，那么它就浮在水上；

（3）冰浮在水上。

第三个思想不必明显地引进，因为它包含于前两个之中。子句“因为冰比水有较小的密度”表达了第一个思想和第二个思想的一部分。在这样的情况下，原因子句不能用具有同样真值的子句来替换，否则就要改变第二个思想及其真值。

另外还有一种复杂的情况。例如，在语句“倍倍尔错误地假定：归还亚尔萨斯－洛林会缓和法国的复仇情绪”中，表达了两个思想：

(1) 倍倍尔相信：归还亚尔萨斯－洛林会缓和法国的复仇情绪；

(2）归还亚尔萨斯－洛林不会缓和法国的复仇情绪。

在第一个思想中“相信”后的子句具有间接所指，但在第二个思想中，同样的子句具有普通的所指。一个子句在复合句中出现两次，一次代表思想，一次代表真值，其所指不同。在这样的情况下，真值并不是子句的全部所指，因此我们不能用另一个具有同样真值的语句来替换这个子句。这就是说，外延论题不适用于这种情况。

弗雷格最后总结说：“很难穷尽语言所提出的一切可能性；但是我希望我已至少阐明了关于为何一个附属子句不能总是可用另一个具有同样真值的语句替换而不妨碍整个句子结构的真值这个问题的一些重要理由。这些理由在于：

(1) 当附属子句不代表真值，因为它只表达一个思想的一个部分；

(2）当附属子句代表一个真值，但并不止于此，因为它的涵义包含一个思想并且是另一个思想的一部分。

第一种情况产生于：

(a)言语的间接所指，

(b)如果句子的一个部分只是一个不定指示词而不是专名。

在第二种情况下，附属子句出现两次，一次具有普通的所指，一次具有间接所指；或者是，附属子句一个部分的涵义可同样是另一个思想的一个成分，这另一个思想同附属子句所直接表达的思想结合起来构成整个句子的涵义。”①

弗雷格的这段话是极其重要的，总结了他对若干内涵命题进行精心研究的成果。弗雷格是现代内涵逻辑的先驱，我们应当在数理逻辑发展史上对弗雷格作出这种公正的评价。

弗雷格的涵义和所指的理论对于逻辑语义学具有重要意义，他的许多论述已为现代的逻辑语义学所吸收。他关于命题真值的思想和外延论题，对于二值外延逻辑的发展具有重要意义，是二值逻辑的理论基础。

弗雷格的涵义和所指的理论还有另一个重要原理：一个命题可以用不同方式的另一个命题加以表达而保持涵义不变。他在1879年的《概念语言》一书中指出“氢轻于二氧化碳”与“二氧化碳重于氢”表达了把不同的函项分别应用于氢和二氧化碳。他在1884年的《算术基础》中举了两个判断：“直线$_a$平行于直线$_b$”和“直线$_a$的方向与直线$_b$的方向是同一的”，它们具有同样的内容，但后者以不同于原来的一种方式“分派内容”并产生了新概念——方向。他在1892年的《论概念和对象》中认为“至少存在4的一个平方根”等值于“数4具有这样的性质：存在某物，它是其平方”与“4的平方根这个概念不是空的”。弗雷格对上述原理较为成熟的表述是在1892年的《论涵义和所指》这篇论文中，这时他明确地提出：作为全称概括来理解的“$x^2-4x=x(x-4)$”与断定函项x^2-4x的值域$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2-4\varepsilon)$等同于函项$\chi(\chi-4)$的值

①P. W F. . PP. 77—78.

域α’(α.(α－4))的表达式（$(\alpha^2-4\alpha)=\alpha'(\alpha(\alpha-4))$,,表达同样的涵义。

美国学者魏兹曼(L. Weitzman）把弗雷格的上述原理称为“重塑”原理，加拿大学者林斯基(B. Linsky）研究了弗雷格的“重塑”原理应遵守的条件,并在丘吉的“涵义和所指的逻辑”中作了形式化的表达。①

综上所说，弗雷格在数理逻辑发展史上第一次建立起命题演算和谓词演算，从逻辑出发定义了自然数，并探讨了涵义和所指的理论，提出了外延论题以及不适用外延论题的一些内涵命题的特点。在弗雷格的成就中，最重要的是引进了量词——全称量词和特称量词。量词的引用是数理逻辑发展史上的一个转折点，标志长达200年的初创时期——逻辑代数和关系逻辑时期的终结和新时期——奠基时期的开始。使用量词是现代逻辑的主要特点，正因为有了量词，才使表意的符号语言得以建立，这种形式语言，不但优于自然语言，而且优于布尔的代数符号语言。

弗雷格的著作在当时并未引起人们的注意，这主要是由于他的符号体系不太方便。罗素在1903年完成他自己的《论数学的原则》(Principles of Mathematics）时，对弗雷格的逻辑进行了深入细致的研究,写了一个附录,对弗雷格从《概念语言》到《算术的基本规律》第一卷等著作第一次作了广泛详尽的评论。从此以后，弗雷格的著作才受到人们的重视。罗素在1902年6月16日给弗雷格的信中说:“就我所知，你的著作是我们时代中最好的，请允许我表达我的深切敬意。”②罗素的评价是十分恰当的。虽然罗素的许多结果是独立于弗雷格得到的，但是他承认在逻辑分析问题

---

①B. 林斯基:《弗雷格意义理论中的‘内容分派”原理》,《哲学译丛》1993年第期。

②F. G. p. 125.

上从弗雷格得到许多教益。弗雷格的影响十分明显地表现在罗素后来与怀特海合著的《数学原理》第一卷(1910)中。在现代,对弗雷格逻辑的研究仍不绝如缕。

最后我们要指出,弗雷格虽然从逻辑推导出一系列算术定理,但是他从逻辑推出算术的纲领并未实现。这是因为他没有深入研究集合论,缺乏得力的工具。也正是由于这一原因,他没有注意他的系统的公理V会产生悖论。罗素在1902年6月16日写信告诉他发现了关于谓词的谓词或类的类的悖论:“你说,一个函项也可以作为不定的元素。我以前相信这一点,但现在由于以下矛盾,据我看来这个观点是可疑的。令w是谓词:是不能述说自身的一个谓词。w能述说自身吗?从每一答案都可得到其反面。所以我们必须得出结论:w不是一个谓词。同样,对那些不属于自身的类(每一个取作一个总体),没有这些类的一个类(作为一个总体)。由此可得(在某些情况下,一个可定义的汇集不构成一个总体。”①这一悖论后来称为罗素悖论。弗雷格接信后感到十分震惊,因为这一悖论直接涉及他的第二个逻辑系统,特别是公理V,动摇了他打算建立算术的逻辑基础。弗雷格在1902年6月22日立即给罗素回信说:“你发现的矛盾使我十分惊奇,我差不多要说,使我惊惶失措,因为它动摇了我打算要建立算术的基础。看来把一个等式的全称概括变形为一个串值等式并不总是被允许的,我的规则V是假的,我在§31(按:指《算术的基本规律》)的说明不足以保证我的记号组合在所有情况下都有一个意义。”②这里,他把悖论的根源归于公理V:

$$(\acute{\varepsilon}F(\varepsilon) = \acute{\alpha}G(\alpha)) \longleftrightarrow (\forall x)(F(x) \longleftrightarrow G(x))。$$

等值式的左边是关于函项域的串值等式,实际上是说,F类等于G类。

在1902年10月,他的《算术的基本规律》第二卷快印刷完毕,

①F. G. p. 124—125.
②同上,P. 127.

他赶写了一个后记。他写道‘ 在工作结束之后而发现他的大厦的基础已经动摇，这对于一个科学家来说，没有比这更为不幸的了。正当本卷的印刷接近完成之际，罗素先生给我的一封信便使我陷入这种境地。这是有关我的公理（V）的问题。……成为问题的恰恰不是我建立算术的特殊方式，而是算术是否完全可能有一个逻辑基础。”①他对公理（V）进行了讨论，说明了从它如何推出悖论，然后他提出对公理（V）作如下的修改：

一个概念的外延同于另一个概念的外延当且仅当归属于第一个概念的每一对象（除了第一个概念的外延）也归属于第二个概念；归属于第二个概念的每一对象（除了第二个概念的外延）也归属于第一个概念。②

弗雷格的修改方案并没有彻底解决问题。蒯因（W.V. Quine)，在1955年证明，弗雷格所作的修改并不能使他的第二个系统避免矛盾。

数理逻辑后来的发展证明，把算术或数学化归为逻辑是行不通的。虽然此路不通，但我们应当正确评价弗雷格的工作。他对数理逻辑的发展有杰出的贡献。从逻辑推出算术，应视为弗雷格的一个假说，他脚踏实地去验证这个假说，最后承认自己失败。这种追求真理的科学精神值得后入学习。

第二节　皮亚诺的符号体系

皮亚诺（Giuseppe Peano，1858—1932)是意大利逻辑学家、数学家和语言学家。生于斯宾尼塔，卒于都灵。1880年毕业于都灵大学，从1881年秋季起，任都灵大学数学教授吉诺基的助手，后来还代替吉诺基的工作；1890年被任命为都灵大学临时教授，1895年晋升为常任教授。他曾发明一种世界语。其主要著作

①P.W.F.p. 234.

②同上 p. 243.

有《用一种新方法所陈述的算术原理》(1889)、《数学的陈述》(5卷,1894—1908)等。

皮亚诺在微积分、微分方程等方面都有贡献。他对数理逻辑的创建起了重要的作用。他发明了一种表意语言,这种语言符号简单清晰,易于辨认和阅读,其中的许多符号在现代的文献中仍被继续使用。皮亚诺及其合作者利用这种符号语言,分析了数学各分支大量的命题,说明了用这种语言表达数学思维是足够的,可行的。总的说来,他没有组成一个完整的逻辑系统,没有取得象弗雷格所取得的那种逻辑成就,但是他独立于弗雷格,在数理逻辑和数学基础方面取得了一些新成果。

一、数理逻辑

皮亚诺首先区别了命题演算同类演算,他认为这是两种不同的演算,而不是同一种演算的两种解释。在两种演算中,命题演算更为基本。我们首先看一看他的命题演算。

字母 a, b, c, …代表命题。

表达式 $a \supset b$ 意为人们从 a 推演出 b。这相当于蕴涵。

对命题 a, b, c, …同时肯定可用记号∩表示为 $a \cap b \cap c$,也可表示为 abc。这相当于合取。

下面我们列举一些皮亚诺在《数理逻辑》一文(载《数学的陈述》第二卷)中的命题演算公式。①在第一节中有45个公式,主要有:

1. $a \supset a$ [Pp]

[Pp]表示初始命题。这个公式是说,a 推演出 a,相当于"如果 a 则 a",表达了同一律。以下 P1 代表命题 1,即 $a \supset a$。

2. $a \supset aa$ [Pp]

a 推出,a 并且 a。

---

①参看 A. Dumitriu: History of Logic, vol. iv (Abacus Press, 1977), pp. 67—80.

3. a=b. ═. a Ↄ b. b Ↄ a [Def]

[Def] 表示定义。这个公式是说，a=b 定义为 a 推出 b 并且 b 推出 a。

4. a=a [P1. Ↄ • P4]

[P1. Ↄ . P4] 表示公式 4 是从公式 1 推演出来的。这里，皮亚诺使用了分离规则，但未加陈述。

5 . ab Ↄ a [PP]

6. a=aa $\left[P2.\binom{a}{b}P5Ↄ.P6\right]$

右边的括号表示公式 6 的证明方法。取命题 2，在命题 5 中以 a 代 b，我们得到：

a Ↄ aa

aa Ↄ a

据定义（命题 3），可得 P6: a=aa。

在命题 6 的证明中，皮亚诺使用了代入规则，但未加陈述。实际上，由命题 2 和命题 5（经代入后），还需用一条规则（现在称之为合取引入规则）得到 aↃaa. aaↃa，这样才能用命题 3 得结论。

7. ab Ↄ ba [PP]

8 . ab=ba $\left[P7.\binom{b,a}{a,b}P7Ↄ.P8\right]$

命题 7 是初始命题，命题 8 由命题 7 来证明。取命题 7 以及在命题 7 中以 b 代 a，以 a 代 b，这样我们有：

a b Ↄ ba

ba Ↄ ab

据命题 3 可得 ab=ba。命题 7 和 8 都是合取交换律。

9. abc Ↄ acb [PP]

10. a b c=acb [P9. Ↄ p10]

命题 9 和 10 是合取结合律。

11. a Ↄ b. Ↄ . ac Ↄ bc [PP]

12. $a \cdot a \supset b . \supset \cdot b$ [P p]

命题12相当于假言推理肯定式。

13. $a \supset b \cdot b \supset c . \supset \cdot a \supset c$ [P p]

这是三段论律。

皮亚诺关于否定词“ — ”的公式有30个，这里举一些例子：

1. $a \supset b . \supset \cdot -b \supset -a$ [p p]

这相当于我们所说的假言易位律：如果a则b，推出如果非b则非a。

2. $a=b . \supset \cdot -a=-b$ $\left[P1 . \binom{b, a}{a, b} P1 . \supset . P2\right]$

3. $-(-a)=a$ [P p]

4. $a \supset b . = . -b \supset -a$ $\left[P1 . \binom{-b, \ -a}{a, \ b} P1 . \supset . P4\right]$

5. $a=b . = . -a=-b$ [P2. $\supset$. P5]

6. $a \cup b=-[(-a)(-b)]$ [Def]

皮亚诺的∪相当于现在的析取符号∨，合取和否定是初始符号，析取通过它们来定义。

7. $-(a \cup b)=(-a)(-b)$ [P6. $\supset$. P7]

8. $-(ab)=(-a) \cup (-b)$ $\left[\binom{-a, \ -b}{a, \ b} P6—P8\right]$

命题7和8就是所谓德摩根律。

皮亚诺在命题演算中还引进∧和∨的概念，∧代表假(在类演算中代表空类)，∨代表真(在类演算中代表全类)。

在皮亚诺的类演算中有以下一些重要概念：

K代表类。

如果a是一个K，$x \varepsilon a$表示“x是一个a”。

皮亚诺第一次用小写希腊字母ε表示一个元素x属于一个类a。

$a \supset b$意为“类a被包含于类b中”，也就是说a的所有元素都

在b的元素中。推演符号仍用ↄ表示。

a∪b意为"由类a和b的所有元素形成的一个新类"，也就是a和b的并。

a∩b（或ab）意为"类a和b的交"。

单元类用希腊字母ι表示；ιx意为仅有一个元素的类。单元类中的个体用倒ι即ɿ表示。

记号χε表示"所有那些东西"，xε(xεa)=a，这就是说："所有那些属于类a的东西是类a"．χε p表示"满足条件p(包含x)的x组成的类"。χε也写成χ∋。

记号∃代表"有一个"，∃a.ↄ.aεK，意为"如果a存在，那么a是一个类并且a不是空的"。

在类演算中，皮亚诺列出了一些初始命题和若干定理。我们不准备列举，只提出以下两条定理：

ιx=yε(y=x)，这是说，仅由一个元素x组成的单元类等同于所有那些等于x的东西，这是单元类的一个特点，

yειx .=. y=x，这是说，y是单元类ιx的一个元素与y=x是同样的意思，这也是单元类的一个特点。

皮亚诺在处理类演算时还引进了全称量词的表示方法，例如：

$a Ↄ b. = : x ε a . Ↄ_x . x ε b$

这个公式的意思是：类a包含于类b，等于说，对所有x而言，如果它属于a，那么它就属于b。这里，推演符号ↄ的右下角带有x，这就是全称量词，其辖域是xεa.ↄ.xεb．在1903年，皮亚诺提出了"真实变元"和"表面变元"的概念，也就是现在所说的"自由变元"和"约束变元"。

以上是皮亚诺在数理逻辑方面的工作，下面我们要介绍他在数学基础方面的工作。

二、数学基础

皮亚诺研究数理逻辑，设计一套表意语言，其目的是为了清楚

地表述数学问题。他在《用一种新方法陈述的算术原理》以及《数学的陈述》等著作中，对算术作了公理化的处理。这同弗雷格把算术化归为逻辑的方法有所不同。皮亚诺认为他的算术公理化方法来自戴德金（R. Dedekind）。戴德金在1888年出版了小册子《什么是数，它有何意义？》中，提出了"链"的概念，在这基础上提出了四条自然数公理。根据戴德金的说法，一个事物系统（或集合）S可以说有另一个系统S′作为它的映象，如果有一个射影或映射规则φ，它对S的每一个元素指派某物或其它东西作为它的映象，并且S′是这些S元素的映象之总体。如果映射总是对S的不同元素指派不同映象，那么它就称之为相似映射。戴德金所说的相似映射就是一一对应。戴德金接着提出，一个系统K称之为关于某一映射的链，如果它包含K′作为一个部分即子系统；这个条件记为K′⊂K（K′包含于K），这就是说，K′是K在自身当中的一个映象。关于链的第一个定理是：一个链的映象本身是一个链。另外一些定理是：包含一个系统A作为一个部分的任一个链也必包含A′；如果A是链K的一个部分，那么所有那些包含K本身、有A作为一个部分的链的交或最大公共部分称之为A的链，或简称A_0；任一包含A作为一个部分的链也包含A_0。当A只有一个元素1的时候，A的链称之为1_0。由上可知，A'和A_0两者由某个特殊的映射φ所决定。在上述一些概念的基础上，戴德金给出了自然数的公理化定义。一个系统N是简单无穷的，如果对这一系统而言，存在满足以下四个条件的映射φ和基本元素1:

α. N′⊂N。

β. N = 1_0。

r. 1不是N′的元素。

δ. φ是相似映射。

在定义了简单无穷系统N之后，如果只考虑N的结构，忽略元素的特殊性质，那么N就是自然数系统。戴德金说："如果在考虑一个

被射影φ排成次序的简单无穷的系统N时，我们完全忽略掉元素的特殊性质，只保留它们的可区别性质，并且仅仅想象在其中它们通过有次序的射影φ成为一对一的集合这样的关系，那么这些元素就称为自然数或序数或简称为数，基本元素1称为数列的基本数。……关系或规律只是从…条件 α、β、γ、δ推出来的，因此在一切有序的简单无穷的系统中总是同样的，它们构成了数或算术的科学的直接对象。”①戴德金的断言清楚地表明，算术的内容是由四个条件推出来的。这四个条件实际上就是四条公理。数学归纳法原则可从这四条公理推出。公理(α) N′⊂N是说，N的映象N′[也就是 φ(N)] 包含于N中，映射φ相当于后来皮亚诺的后继函数，所以公理(α)实际上是说，对每一确定的数n，相应地有一个确定的后继数 n′。公理(β) $N=1_0$ 是说，N是元素1所属于的所有那些链K(在S中)的交1。；戴德金在1890年的《致克福尔斯坦的信》中对这条公理解释说：“如果我想避免我的专门术语‘链’，我可以说：S的一个元素n属于序列N当且仅当n是S的每一部分K的一个元素，并且K有以下两个性质：(i)元素1属于K和(ii)映象 φ(K)是K的一个部分。”②公理(γ) 1不是N′的元素，这是说，1是基本数，不是任何数的后继，由此可见，N′[或 φ(N)]是N的真部分，N是无穷集合。公理(δ)φ 是相似映射，这就是说，不同的数a和b有不同的后继数a′和 b′。

1889年，皮亚诺发展了戴德金的算术公理化的思想，出版了《用一种新方法陈述的算术原理》，③提出了自然数算术的一个公理系统。他明确地使用了“公理”的概念，列出了如下九条公理：

1.1 ε N。这是说，1是一个数。

2．a ε N⊃. a=a 。

如果a是一个数，则a=a。

---

①戴德金《什么是数,它有何意义?》6 § ,73; 转引自《逻辑学的发展》第592页。

②F. G p. 101.

③ 载 F. G pp. 83 ～ 97.

3 . a, b ε N.Ͻ ∶ a=b • = • b=a

如果 a，b 是数，则 a=b 等值于 b=a。

4 .a, b, ceN Ͻ.˙ a=b • b=c: Ͻ. a = c b

从 a, b, c 是数可推演出：如 a=b 并且 b=c 则 a=c。

5.a=b • b ε N: Ͻ ∶a ε N。

由 a=b 并且 b 是一个数可得：a 是一个数。

6 . a ε N.Ͻ . a+1ε N 。

如果 a 是一个数，则 a + 1 即 a 的后继也是数。

7.a, b ε Ͻ N : a=b. =. a+1=b+1.

由 a, b 是数可得 a=b 等值于 a + 1=b+1

8. a ε N.Ͻ a+1 — =1 。

如果 a 是数，则 a+1 不等于 1。

9.κ εK∴1 εk ∴ xεN xεk∶Ͻx . x+1 ε k ∶: Ͻ .NϽ k 。

这是数学归纳法原则：由 κ 是一个类并且 1 属于 κ，并且对所有 x 而言，如果 x 属于 N 并且 x 属于 κ 则 x+1 属于 κ，可以推出 N 包含于 κ．这里 κ 是类变元，K 是类的类。

公理 2—5 是关于相等的，其它五条是刻划数的，用文字可陈述为：

1. 1 是一个数（后来皮亚诺改用 0），

6• 任一数的后继是一个数，

7• 没有两个数具有相同的后继，

8. 1 不是任何数的后继（后来改用 0)。

9• 任何性质，如果 1 具有而且任何数的后继也具有的话，则所有数都具有此性质（后来改用 0)。

第一条公理和第九条合起来相应于戴德金的β ，第六条公理相应于α，第七条相应于δ，第八条相应于γ。

从 1 开始，皮亚诺用 x+1 表示后继函数。然后引进了加法和乘法的递归定义。

加法定义（原编号为 §1, 18):

a, b ε N Ɔ . a+ (b+1) = (a + b) + 1 。

皮亚诺对这个定义解释说：如果 a 和 b 是数，并且如果 (a + b) +1 有意义(即如果 a + b 是一个数) 但 a + (b+1) 还未定义，那么 a+ (b+1) 意为 a + b 后的一个数。

乘法定义(原编号为 §4, 1 和 2):

1\. a ε N Ɔ . a × 1=a

2\. a, b ε N• Ɔ . a × (b+1) =a × b+a。

由上可见，皮亚诺给出的加法和乘法的定义就是现在的递归定义。

在《 算术原理》中的逻辑部分，皮亚诺列出了命题演算的公式，类演算的公式，还有一部分量词理论，但都没有证明程序。由于没有给出推导规则，因而在算术部分就没有可用的逻辑。他在给出算术证明时是不严格的，例如第一个定理(编号为 11) :

2 εN

证明：

P1. Ɔ : 1 ε N (1)

1[a] (P6) . Ɔ : 1 ε N Ɔ . 1+1 ε N (2)

(1) (2) . Ɔ 1+1 ε N (3)

P 10. Ɔ 2=1+1 (4)

(4) . (3) . (2, 1+1) [a, b] (P5) : Ɔ :2 ε N **(定理)**

这是皮亚诺的一个典型证明：

第一步是公理 1(P1) . 第二步是从公理 6(P6) 以 1 代 a 而得到的，这里使用了代入规则，但皮亚诺并未从逻辑上给出代入规则; 1[a] (P6) 表示在 P6 中以 1 代 [a] 。第三步是从(1) (2) 推出来的，但要使用分离规则，这也是皮亚诺没有陈述的。第四步是根据 P10 ，这是一个定义：2=1 + 1; 3=2 + 1; 4=3 + 1; 等等。最后一步在公理 5 中，以 2 代 a ，以 1+1 代 b，这样我

2=1+1 , 1+1 ε N: Ɔ. 2 ε N,

(4) 和(3) 就是这个公式的前件，因此可得 $2 \varepsilon N$；这里需要从(4)，(3) 用合取引入规则得到两个公式的合取，还需要分离规则，才可得 $2 \varepsilon N$。

在《算术原理》中，皮亚诺还处理分数、实数、极限的概念和点集论的一些定义。

在《算术原理》发表以后，在1895年至1908年，皮亚诺相继发表了五篇用数理逻辑的记法说明数学公式的文章，每一篇都用五条公理(但用0代替了1) 作为算术基础。他在1891年的一篇文章中，用模型方法证明了五条公理是独立的。

以上我们简略地介绍了皮亚诺在数理逻辑和数学基础方面所做的工作，由此我们可以看出他对数理逻辑的主要贡献有：

1．创立了一套简单清晰的表意语言符号。有些符号现在仍被使用，例如用 ε 表示属于的关系，用 ι 表示唯一性等；有些符号被罗素的著作所采用；有些符号在形式上被作了一些改动，演变为现在通行的一些符号，如蕴涵号、否定号、合取号和析取号等。

2. 区别了命题演算与类演算，并认为命题演算更为基本。它们不是同一种演算的两种不同的解释。

3．提出了一部分量词的理论。

4. 区别了类和类之间的包含关系同分子属于类的关系，$a \supset b$ 表示 a 包含于 b，$a \varepsilon b$ 表示 a 属于 b。

5. 区别了某一个体同以此个体为唯一分子的单元类，ι x 表示单元类，ι x 表示唯一的个体 x.

他在数学基础方面的主要贡献是发展了戴德金的算术公理化思想，提出了自然数的公理系统，对后来的发展具有很大影响，人们称之为“皮亚诺公理”。皮亚诺公理为后来的形式算术系统奠定了基础。

罗素对皮亚诺的贡献给予了很高的评价，他说：“在1990年巴黎开国际哲学会的时候，我意识到逻辑改革对数理哲学的重要性。我是因为听了来自都灵的皮亚诺和到会的一些别的哲学家的

讨论才认识到了这一点。在此以前，我不晓得他曾做过一些什么。但是我深深感到，在每项讨论的时候，他比别人更精确，在逻辑上更严密。我去见他，并对他说：‘我想把你所有的著作都读一下，你身边有吗？’他有。我立刻把他的著作都读了。正是这些著作促进了我对于数学原理有我自己的主张。……皮亚诺所给我的启发主要来自两个纯乎是技术上的进步。……第一种进步是把‘苏格拉底是不免于死的’这种形式的命题和‘一切希腊人是不免于死的’这种形式的命题分开。……我从皮亚诺听到的第二个重要的进步是，由一个项所成的一个类和那个项并不相等。……除了我所提到的事项以外，在皮亚诺和他的门徒的工作中还有一些东西使我喜欢。我喜欢他们不用图形发展几何学的方法，这样就表示康德的直观是用不着的。”①

皮亚诺的工作存在着很大的缺陷。他没有象弗雷格那样构成一个完整的逻辑演算。他在逻辑推导过程中，虽然有“代入”的概念,但未能陈述代入规则 更重要的是,他没有陈述分离规则,这一点同他把符号 $\supset$ 解释成推出，而不是解释成真值蕴涵有密切的联系。因此，他在逻辑推导过程要诉诸直观的论证。正因为如此，他的算术公理系统也不是严格的形式系统。尽管有这些缺陷，皮亚诺在数理逻辑史上的功绩仍然是不可磨灭的。

第三节　罗素的逻辑演算

罗素(Bertrand Russell，1872—1970)是英国著名哲学家和数理逻辑学家，国际知名学者。他是分析哲学的创始人之一，对逻辑实证主义的发展有很大影响。他曾于1950年获得诺贝尔文学奖金。罗素在数理逻辑发展史上具有崇高的地位，他总结和发展了前人特别是皮尔士、弗雷格、皮亚诺等人的成果，提出了新问

---

①罗素著《我的哲学的发展》，温锡增译，商务印书馆1983年版第57—64页。

题，并作出许多创造性的贡献，起了承先启后的作用。

罗素11时岁学习欧几里得几何，从此，数学成为他一生的爱好。1890年考进剑桥大学，三年后通过数学荣誉学位考试。1895年,他完成了一篇《论几何学的基础》的论文,取得了在剑桥大学当研究员的资格。1900年7月，罗素参加了在巴黎召开的国际哲学家大会。在会上罗素见到了皮亚诺，在皮亚诺的数理逻辑中他发现了多年来正在寻找着的那种用于逻辑分析的工具。他花了两个月的时间去掌握和扩充皮亚诺的方法，于1900年10月动手写《数学的原则》，年底完成初稿，经过一年多时间的修改，于1903年出版。他在《数学的原则》这部著作中明确地提出了"一切数学都可以从符号逻辑导出"的主张，这就是所谓逻辑主义论题。1901年，罗素发现了"所有不包含自身为其分子的类的类"悖论（世称罗素悖论），并在1902年将此悖论通知了弗雷格。这时，罗素研读了弗雷格的著作,并在《数学的原则》中写了一个附录,介绍弗雷格的学说。在罗素悖论之后，其它一些悖论也不断出现，这使数学家和逻辑学家感到震惊。罗素对悖论进行了深入研究，取得了重要结果，明确提出了逻辑类型论，发展了《数学的原则》一书中初步的类型论思想，这些结果集中体现在1908年发表的论文《以类型论为基础的数理逻辑》中。为了实现把数学化归为逻辑的纲领，罗素与怀特海(A. N. Whitehead, 1861—1947)合作,于1910年写完了三卷本的《数学原理》(Principia Mathematica,通称P. M,第一卷, 1910 第二卷,1912 第三卷,1913)。为了通俗阐明他的逻辑和数学基础的学说，他于1919年出版了《数理哲学导论》一书。

罗素的逻辑学说集中体现在P. M中。P. M从命题演算和谓词演算开始，然后通过一元和二元命题函项定义了类和关系的概念，建立了抽象的类演算和关系演算。由此出发，在类型论的基础上用连续定义和证明的方式引出了数学（主要是算术）中的主要概念和定理。

在这一节我们评述罗素的演算系统，在第十一章讨论逻辑类

型论。

一、命题演算和谓词演算

罗素建立了一个完备的逻辑演算，是逻辑演算的完成者。从此，数理逻辑有了一个稳固的基础，可以向各个方向发展了。

罗素把命题演算称为演绎理论，也就是完全公理化的理论。这一理论是由初始概念、初始命题（公理）、推演规则和定理构成的体系。

命题演算的初始概念有：

(1) 初等命题　一个初等命题就是一个不包含任何变元的命题。如"这是红的"，就是一个初等命题。用否定词、合取词和析取词等联结起来的命题也是初等命题。字母 p, q, r, s 等表示初等命题。以上是对"初等命题"这个初始概念的描述，不是定义。

(2) 初等命题函项　这是一个表达式，其中含有变元，当变元取值后，所得的表达式的值是初等命题。例如，如果 p 是一个不确定的初等命题，"非－p"就是一个初等命题函项，即真值函项。

(3) 断定　这一概念来自弗雷格，罗素用"⊦"表示断定记号，用于对一个确定的命题的断定。

(4) 对命题函项的断定　这是对初等命题函项所作的断定。

(5) 否定　如果 p 是一个命题，其否定"非－p"或"p 是假的"用"～p"表示。

(6) 析取 p 和 q 的析取用"p∨q"表示，相当于语言中的相容性的"或"。

罗素用的初始命题联结词是～和∨，其它联结词可由此定义出来。在初始符号中，罗素还用了点号（·），这来自皮亚诺。罗素用点号表示括号，或用于表示定义，或用在断定之后。

$$*1.01\quad p\supset q\,.=.\sim p\vee q\quad Df.$$ ①

---

①＊1.01 是 P. M. 中的编号，以后所引用的公式编号也是如此。

"Df"代表定义。这是说，如果 p 则 q，定义为非 p 或 q。这是一种实质蕴涵。

命题演算的初始命题(公理)有：

$*1.1$. 一个真的初等命题所蕴涵的任何命题是真的。Pp。("Pp"表示初始命题，这一表示方法来自皮亚诺)。

$*1.2$. $\vdash : p \vee p . \supset . p$ Pp。

这一命题说："如果 p 是真的或者 p 是真的，则 p 是真的"。它称为"重言原理"(简写为 Taut)。

$*1.3$. $\vdash : q . \supset . p \vee q$ Pp。

这一命题是说，如果 q 是真的，则"p 或 q"是真的。它称为"附加原理"(简写为 Add)

$*1.4$. $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$ Pp。

这一命题是说，"p 或 q"蕴涵"q 或 p"。它称为"交换原理"(简写为 Perm)。

$*1.5$. $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$ Pp。

这一命题是说，如果 p 是真的，或者"q 或 r"是真的，那么 q 是真的，或者"p 或 r"是真的。它称为"结合原理"(简写为 Assoc)。

$*1.6$. $\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ Pp。

这一命题是说，如果 q 蕴涵 r，那么"p 或 q"蕴涵"p 或 r"。它称为"叠加原理"(简写为 Sum)。

命题演算的推演规则有两条，即分离规则和代入规则。罗素当时没有明确区别对象语言和语法(语形)语言，因而没有明确陈述上述两条语法(语形)规则。在这一点上，罗素不如弗雷格那样精确。罗素的 $*1.1$ 实际上是分离规则，他说："我们不能用符号语言表达这原理，部分是因为变元 p 在其中的任何符号语言仅给出这样的假定：p 是真的，而不是给出事实：它是真的。"①分离

① P. M vol. 1, Cambridge, second edition, 1925, p. 94.

规则不能用对象语言（形式语言）来陈述，但可用语法语言（元语言）来陈述。罗素没有这样做，没有把＊1.1作为语法规则提出，而是把它与对象语言中的重言式1.2-1.6并列。他在证明过程中应用了命题代入规则，但他认为："承认某个命题是先前已证的或假定的一个命题的实例，这对从一般规则进行的推演过程是重要的，但本身不能被建立为一个一般规则，因为所需的应用是特殊的，没有一个一般规则能明确地包括特殊的应用。"①罗素的这种说法是不对的，因为用语法语言完全可以陈述这种从一般到特殊的代入规则。罗素关于分离规则和代入规则的不当说明，并不妨碍命题演算中的推演。

另外要说明一点，贝尔纳斯（Bernays）证明，＊1.5（结合原理）可从＊1.2至＊1.4和＊1.6等四条公理推出来，因此，＊1.5在这个系统中是不独立的。

在P.M.中，命题演算的证明方法是比较严格的，下面看两个例子：

＊2.02 ·⊢：q.⊃.p⊃q

证明.

$$\left[\text{Add}\ \frac{\sim p}{p}\right]\vdash :q.\supset .\sim p\vee q \qquad (1)$$

$$(1)(*1\cdot 01)\vdash :q.\supset .p\supset q$$

在上述证明中，$\left[\text{Add}\ \frac{\sim p}{p}\right]$是代入的符号，表示在Add（附加原理的缩写）q.⊃.p∨q中，以～p代p，得到q.⊃.～p∨q。然后根据(1)和＊1.01)即⊃的定义得到＊2.02。严格说来，在罗素的命题演算系统中，还应增加一条语法规则——定义置换规则。在上述证明中，如果加上这条规则就比较完美了。

$$*2.3 \vdash :p\vee(q\vee r).\supset .p\vee(r\vee q)$$

---

① 同上。P. 98.

证明.

$$\left[\text{Perm}\frac{q,r}{p,q}\right]\vdash :q\vee r.\supset .r\vee q$$

$$\left[\text{Sum}\frac{q\vee r,\ r\vee q}{q,\quad r}\right]\supset\vdash :p\vee(q\vee r).\supset .p\vee(r\vee q)$$

下面我们列出命题演算的一些重要定理。

$*2.03 \cdot\vdash :p\supset\sim q.\supset .q\supset\sim p$

这是说，如果p则非q蕴涵如果q则非p。

$*2.15 \cdot\vdash :\sim p\supset q.\supset .\sim q\supset p$

$*2.16 \cdot\vdash :p\supset q.\supset .\sim q\supset\sim p$

$*2.17 \cdot\vdash :\sim q\supset\sim p.\supset .p\supset q$

上四条定理是"换质位原理"。

$*2.04 \cdot\vdash :.p\supset .q\supset r:\supset :q.\supset .p\supset r$

这是说，如果p则（如果q则r），蕴涵如果q则（如果p则r）。这称为"交换原理"。

$*2.05 \cdot\vdash :.q\supset r.\supset :p\supset q.\supset .p\supset r$

$*2.06 \cdot\vdash :.p\supset q.\supset :q\supset r.\supset .p\supset r$

以上两条称为"三段论原理"。

$*2.08 \cdot\vdash .p\supset p$

这是同一律,任一命题蕴涵自身。

$*2.21 \cdot\vdash :\sim p.\supset .p\supset q$

即假命题蕴涵任一命题

关于命题的合取有以下两个定义：

$*3.01.\ p.q.=.\sim(\sim p\vee\sim q)\ Df$

这里"p.q"是p和q的逻辑积，也就是合取。

$*3.02 \cdot p\supset q\supset r.=.p\supset q.q\supset r\ Df$

这个定义是为简化证明用的，它是说，p⊃q并且q⊃r可以写成p⊃q⊃r。

$*3\cdot 2\vdash :.p.\supset :q.\supset .p.q$

这是说，p蕴涵如q则p并且q，即如果两个命题每一个皆真，则它们的逻辑积也真。

$*3\cdot26.\ \vdash:p.q\cdot\supset.p$

$*3\cdot27\cdot\ \vdash:p.q.\supset.q$

以上两条是说，如果两个命题的逻辑积是真的，则每一个也是真的。

$*3\cdot3.\vdash:.p.q.\supset.r:\supset:p.\supset\cdot q\supset r$

这是说，如果p与q合起来蕴涵r，那么p就蕴涵如果q则r。这一原理称为"输出"，因为q从假设中被"输出"了。这个名称是皮亚诺起的。

$*3\cdot31\cdot\ \vdash:.p.\supset\cdot q\supset r:\supset:p\cdot q.\supset.r$

$*3\cdot35\cdot\ \vdash:p.p\supset q.\supset.q$

是说，如果p是真的，并且从p可得q，那么q也是真的。它称为"断定原理"。

$*3.43.\ \vdash:.p\supset q.p\supset r\cdot\supset:p.\supset.q.r$

这是说，如果一个命题蕴涵两个命题的每一个，那么它就蕴涵它们的逻辑积。皮亚诺称这一原理为"组合原理"。

$*3\cdot45\cdot\ \vdash:.p\supset q\cdot\supset:p.r\cdot\supset\cdot q.r$

这是说，在蕴涵式$p\supset q$的两边可以用公因子相乘。这被皮亚诺称为"因子原理"。

$*3\cdot47\cdot\ \vdash:.p\supset r\cdot q\supset s.\supset:p.q.\supset.r.s$

$*3.24.\ \vdash.\sim(p.\sim p)$

这是矛盾律。

两个命题等值的定义如下：

$*4.01.\ p\equiv q.=.p\supset q.q\supset p\quad Df$

这就是说，两个命题等值即它们有同样的真值。

$*4.1\cdot\vdash:p\supset q.\equiv.\sim q\supset\sim p$

$*4.11.\ \vdash:p\equiv q.\equiv.\sim p\equiv\sim q$

$*4.2\cdot\ \vdash.p\equiv p$

*4·21· $\vdash : p \equiv q . \equiv . q \equiv p$

*4·22· $\vdash : p \equiv q . q \equiv r . \supset . p \equiv r$

以上三个命题断定，等值是自返的，对称的和传递的。

*4. 24. $\vdash : p . \equiv . p . p$（重言律）

*4. 25. $\vdash : p \equiv . p \vee p$（重言律）

*4. 3. $\vdash : p . q . \equiv . q . p$（交换律）

*4. 31. $\vdash : p \vee q . \equiv . q \vee p$（交换律）

*4. 32. $\vdash : (p . q) . r . \equiv . p . (q . r)$（结合律）

*4. 33. $\vdash : (p \vee q) \vee r . \equiv . p \vee (q \vee r)$（结合律）

*4. 4. $\vdash :. p . q \vee r . \equiv : p . q . \vee . p . r$（分配律）

*4. 41. $\vdash :. p . \vee . q . r : \equiv . p \vee q . p \vee r$（分配律）

*4. 71· $\vdash :. p \supset q . \equiv : p . \equiv . p . q$

这是说，p蕴涵q当且仅当p等值于$p . q$。根据这一定理，一个蕴涵式可用一个等值式替换。

*4·73. $\vdash :. q . \supset : p . \equiv . p . q$

这是说，一个真因子q可以与一个命题p分离掉或加到它上面而不改变命题的真值。

*5·1· $\vdash : p . q . \supset . p \equiv q$

这是说，如果两个命题皆真，则它们等值。

*5·32· $\vdash :. p . \supset . q \equiv r : \equiv : p . q . \equiv . p . r$

*5·6. $\vdash :. p . \sim q . \supset . r . \equiv : p . \supset . q \vee r$

由上可见，罗素的命题演算系统同现在通行的系统比起来已经不差上下了。下面我们再看一看罗素的谓词演算。谓词演算与命题函项和量词有关。罗素称 ϕx是一个命题函项，如果 ϕx 包含一个变元x，当x被给定任一固定的意义时它变为一个命题。罗素觉得这种说法不太准确，他又说，命题函项是$\phi \hat{x}$（即 $\phi(\;)$），这里 $\hat{x}$ 是一个空位记号），ϕx是命题函项 $\phi \hat{x}$ 的不定值。① 单

①P. M vol. 1, pp. 14—15。罗素常常混用。

单一个命题函项可以看成是一个模式，一个空壳，一个可以容纳意义的空架子，而不是已经具有意义的东西。’，①这就是说，命题函项带有空位，填以变元x，成为命题函项不定值，当x被给定一种确定的意义时，就变成一个命题。

罗素用（x）表示全称量词，（∃x）表示存在量词，接着引入了全称式（x）．φ$\hat{x}$（读为“φx常真”或“对所有x而言，φx”），存在式（∃x）．φx（读为：“φx有时真”或“有一个x使得 φx”），以及形式蕴涵（x）：φx．⊃．ψx（读为：“φx常蕴涵ψx”或“一切具有性质φ的对象有性质ψ”）。在（x）．φx和（∃x）φx中，x称为表面变元。不包含表面变元的命题称为“初等命题”，所取的一切值均为初等命题的函项称为初等函项。如果φ$\hat{x}$是一个初等函项，则（x）．φx和（∃x）．φx称为“一阶命题”。

在P. M. 中，谓词演算是广义的，不限于一阶谓词演算。量词所约束的表面变元可以是个体，也可以是代表命题函项、类、关系等等的字母。我们应特别注意一阶谓词演算，也就是量词所约束的表面变元是个体的那种演算。

以下字母p，q等代表初等命题，也代表φ，“ψ”φx，ψx等。这样，命题演算就可推广为一阶谓词演算的子系统。原来的命题演算只应用于初等命题，一阶谓词演算应用于（x）．φx和（∃x）φx一类的一阶命题。同样，我们也可得到二阶谓词演算等。罗素的谓词演算是以类型论为基础的。罗素说：“一个‘类型，被定义为某一函项的意义域。”②例如，φ$\hat{x}$的意义域就是使φx有值的那些变目。

罗素首先给出～和∨的定义：

＊9.01 ．～{（x）．φx} ．＝（∃x）．～φx Df

＊9.02 ～{（∃x）．φx}．＝．（x）．～φx Df

---

①罗素：《数理哲学导论》，晏成书译，商务印书馆1982年版，第148页。
②P. M. vol. 1, P. 11.

以上定义中的花括号可以省掉。

当有关命题的一个或两个是一阶的，在定义析取时有六种情况：

$*9.03\cdot\ (x)\cdot\phi x.\vee.p:=.(x).\phi x\vee p$ Df

这一定义是说，对所有 x 而言 ϕx 或者 p，就是对所有 x 而言(ϕx 或 p)。这里，全称量词的辖域改变了，p 是任一命题。

$*9\cdot 04\cdot p\cdot\vee\cdot(x)\cdot\phi x:=\cdot(x).p\vee\phi x$ Df

$*9.05\cdot\ (\exists x)\cdot\phi x.\vee.p:=.(\exists x).\phi x\vee p$ Df

$*9.06.\ p.\vee.(\exists x).\phi x:=.(\exists x).p\vee\phi x$ Df

$*9.07.\ (x).\phi x.\vee.(\exists y).\psi y:=:(x):(\exists y).\phi x\vee\psi y$ Df

这一定义是说，$(x)\phi x\vee(\exists y)\psi y$ 可以变形为 $(x)(\exists y)(\phi x\vee\psi y)$。

$*9.08\cdot\ (\exists y).\psi y.\vee.(x).\phi x:=:(x):(\exists y).\psi y\vee\phi x$ Df

这6个定义的作用是为了使量词的辖域包括整个被断定的公式。

蕴涵、合取和等值的定义可从命题演算中不加改变地应用于 $(x)\cdot\phi x$ 和 $(\exists x)\phi x$。

所有以上的定义是关于一阶命题的，对于相继的类型，我们可重复这些定义，因此我们就达到任一类型的命题。

谓词演算的初始命题(公理）有6条，每两条为一组。

$*9\cdot 1\cdot\ \vdash:\phi x.\supset.(\exists z)\cdot\phi z$ Pp

$*9\cdot 11\cdot\vdash:\phi x\vee\phi y.\supset.(\exists z).\phi z$ Pp

这两条公理的作用是从初等命题到一阶命题。$*9.1$ 是说，如果 ϕx 是真的，那么 $\phi\hat{z}$ 就有一值是真的。

$*9.12\cdot$ 被一个真前提所蕴涵的东西是真的。Pp

$*9.13\cdot$ 在含有一个真实变元的任一断定中，这样的变元可以转变为表面变元，其所有可能值被断定为满足该函项。Pp

$*9.12$ 就是分离规则，罗素在这里克服了以前的缺陷，他明确地把 $*9.12$ 解释为：“ 给定‘ $\vdash.p$ ’和‘ $\vdash.p\supset q$，，我们可以得

到‘$\vdash .q$’，即使 p 和 q 不是初等的。”①他原来在命题演算部分列出了一条“类型同一的公理”（*1.11），实际上也是分离规则，他解释说：“我们可以从‘$\vdash .\phi x$’和‘$\vdash .\phi x \supset \psi x$’得到‘$\vdash .\psi x$’，这里 x 是一个真实变元，ϕ 和 ψ 不一定是初等函项。我们常常需要这种形式的公理。对一个变元的函项可以采用，对几个变元的函项也适用。”②

*9.13. 现在称为概括规则。它是说，不管 y 怎样选择，如果 ϕy 是真的，则 $(x).\phi x$ 是真的。这是“变真实变元为表面变元”的规则。罗素明确地说，这一初始命题仅用于推理。这就是说，*9.13 是一条推理规则。罗素虽然陈述了分离规则，但未陈述代入规则，这是一个缺陷。

*9.14. 如果“ϕx”是有意义的，那么，若 x 与 a 同类型，则“ϕa”是有意义的；反之亦然。pp

*9.15. 如果对某个 a，有一个命题 ϕa，那么就有一个函项 $\phi \hat{x}$，反之亦然。Pp

上文说过，罗素的谓词演算是以类型论为基础的。*9.14 和 *9.15 体现了这个特点。为了解释什么是“同类型”罗素引进一个初始概念：个体。如果 x 既不是一个命题也不是一个函项，那么 x 就是“个体”。“u 和 v 有同一个类型”的定义是：(1) 两者是个体；(2) 两者是取同类型变目的初等函项；(3) u 是一个函项，v 是它的否定；(4) u 是 $\phi\hat{x}$ 或 $\psi\hat{x}$，v 是 $\phi\hat{x} \vee \psi\hat{x}$，这里 $\phi\hat{x}$ 和 $\psi\hat{x}$ 是初等函项；(5) u 是 $(y).\phi(\hat{x}, y)$，v 是 $(z).\psi(\hat{x}, z)$，这里 $\phi(\hat{x}, \hat{y})$，$\psi(\hat{x}, \hat{y})$ 具有同样的类型；(6) 两者是初等命题；(7) u 是一个命题，v 是～u；(8) u 是 $(x).\phi x$，v 是 $(y).\psi y$，这里 $\phi\hat{x}$ 和 $\psi\hat{x}$ 有同样类型。

以上就是罗素的谓词演算的出发点，在此基础上就可进行定

---

① P. M. vol. 1, p. 132。
② 同上。

理的推演了。罗素首先证明了命题演算的公理和定理，在有关命题的一些或全部具有形式 $(x).\phi x$ 和 $(\exists x).\phi x$ 之时，同样成立。例如：

$*9\cdot3\cdot\vdash:.(x).\phi x.\vee.(x).\phi x:\supset.(x).\phi x$

这与 $*1.2$ 相应。

$*9.32\cdot\vdash:.q.\supset:(x).\phi x.\vee.q$

这与 $*1.3$ 相应。

以下我们看一些关于一元谓词的定理。

$*10\cdot1\cdot\vdash:(x).\phi x.\supset.\phi y$

这是说，在所有情况下是真的东西在任一情况下也是真的。这条定理在以后的一些系统中是公理。

$*10.23\cdot\vdash:.(x).\phi x\supset p.\equiv:(\exists x).\phi x.\supset p$

即对所有 x 来说，$\phi x\supset p$，等值于如有一 x 是 ϕ 则 p。

$*10\cdot24\cdot\vdash:\phi y.\supset.(\exists x).\phi x$

这实际上是公理 $*9.1$。

$*10\cdot27\cdot\vdash:.(z).\phi z\supset\psi z.\supset:(z).\phi z.\supset.(z).\psi z$

即如果 ϕz 常蕴涵 ψz，那么 $(z).\phi z$ 蕴涵 $(z).\psi z$。这一定理说明全称量词对蕴涵可以分配。

$*10\cdot26\cdot\vdash:.(z).\phi z\supset\psi z:\phi x:\supset.\psi x$

这是三段论的一种形式。罗素举了一个例子，令 ϕz。代表 z 是一个人，ψz 代表 z 是有死的，x 代表苏格拉底。定理是说：如果所有人是有死的，并且苏格拉底是人，那么苏格拉底是有死的。三段论的另一种形式是：

$*10\cdot3\cdot\vdash:.(x).\phi x\supset\psi x:(x).\psi x\supset\chi x:\supset.(x).\phi x\supset\chi x$

这两种形式在传统逻辑中被混淆了很长时间，皮亚诺和弗雷格第一次把它们作了区别。

$*10.42.\vdash:.(\exists x).\phi x.\vee.(\exists x).\psi x.\equiv.(\exists x).\phi x\vee\psi x$

$*10\cdot5\cdot\vdash:.(\exists x).\phi x.\psi x.\supset:(\exists x).\phi x.(\exists x).\psi x$

我们应注意，$*10.42$ 是等值式，$*10.5$ 是蕴涵式，不能逆过

来。

罗素也证明了若干关于多元谓词的定理，这里我们仅举几个例子：

$*11\cdot1\ \vdash :(x, y).\ \phi(x, y) .\equiv: (y, x) . \phi(x, y)$

$*11.23.\ \vdash:(\exists x, y) . \phi(x, y) .\equiv: (\exists y, x)\ \phi(x, y)$

$*11.26.\ \vdash :(\exists x):(y).\phi(x, y) :\supset: (y):(\exists x).\phi(x, y)$

$*11.1$是说，两个重叠的全称量词可以交换。$*11.23$是说，两个重叠的存在量词可以交换。$*11.26$是说，$(\exists x)(y)$与$(y)(\exists x)$不能交换，只能是左边蕴涵右边。罗素举了一个例子，令$\phi(x, y)$是命题函项"如果y是一个真分数，则x是一个大于y的真分数"。对于y的一切值，我们有$(\exists x).\phi(x, y)$，使得$(y):(\exists x).\phi(x, y)$成立，即"对所有y，如果y是一个真分数，则总有一个真分数大于y"。但"$(\exists x):(y).\phi(x, y)$"表达了一个假命题："有一个真分数，它大于一切真分数"。

以上我们扼要地评述了罗素的命题演算和谓词演算。虽然它在有的地方还不够严格，但总的讲来，罗素的命题演算和谓词演算比起弗雷格的演算进了一步，无论是从符号体系方面，还是从内容方面，都很接近我们今天所使用的逻辑演算读本。正因为有逻辑演算作基础，罗素还建立了类和关系的理论，摹状词理论，进行了从逻辑推导数学的伟大工作。著名逻辑学家哥德尔(Gödel，1906—1978)在评论罗素的数理逻辑时说："罗素的工作是沿着弗雷格和皮亚诺的思路开始的。弗雷格不畏劳苦地进行分析证明，但在整数序列的最初等的性质之外并未获得成果，而皮亚诺则完成了用新的符号系统表达一大组数学定理的工作，但没有加以证明。只是在《数学原理》一书中才完全应用了这种新方法，从很少的一些逻辑概念和公理实际上推出了很大一部分数学。此外，这门年轻的科学由于有了新的工具即抽象的关系理论而丰富起来了。关系演算是由皮尔士和施罗德在以前发展的，但只是有限的一部分，并且与数的代数极为相似。在《原理》中，不仅康托尔的集合论而

且普通的算术和度量理论都是从这个抽象的关系的观点来进行处理的。”①

下面我们论述罗素的关系逻辑。

二、关系逻辑

性质属于一个个体，而关系存在于多数个体之间。因此，应用于一个个体词的谓词表示性质，应用于多数个体词的谓词表示关系。$\phi\hat{x}$ 这一命题函项所定的是类，记为 $\hat{z}(\phi z)$。例如,如果 $\phi\hat{x}$ 是一个方程式，$\hat{z}(\phi z)$ 将是它的根所组成的类；如果 ϕx 是“x 有两条腿但无羽毛”,那么 $\hat{z}(\phi z)$ 就是人类 如果 ϕx 是 $0<x<1$”, 那么 $\hat{z}(\phi z)$ 就是真分数的类，等等。

$\phi(x, y)$ 这个命题函项所定的是关系，记为 $\hat{x}\hat{y}\phi(x, y)$。类和关系都是从外延方面来理解的。一个关系是由一切满足命题函项 $\phi(x, y)$ 的二元有序组 (x, y) 所组成的类。在谈到关系而不必提到定那个关系的命题函项时，复杂的关系符号可用 K 等来代替。在任何 x, y 有 K 关系等于 $\phi(x, y)$ 是真的条件之下，K 是 $\phi(x, y)$ 这个命题函项所定的关系。

我们知道，谓词演算可以表达关系命题和证明关系推理，但为了用逻辑表述数学的命题和推理，使用关系的语言更为方便。因此，需要对关系本身构成一套理论，建立演算。关系逻辑与谓词演算的区别并非范围的不同，而是研究侧面的不同。

关系逻辑与类逻辑有许多类似的规则。罗素在 $*22$ 构造了类演算，$*23$ 构造了关系演算，对前人的成果作了总结。关系演算有以下 5 个定义：

$$*23\cdot01\cdot\ R\mathrel{\dot\subset}S\ .=:\ xRy\ .\supset_{x,y}.\ xSy \qquad \text{Df}$$

这是说，R 包含于 S 定义为，对所有 x，所有 y 而言，如果 x 对 y 有 R 关系，那么 x 对 y 就有 S 关系。

---

①中国社科院哲学所逻辑室编：《数理哲学译文集》，商务印书馆 1988 年版，第 159—160 页。

$*23\cdot02\cdot R\dot{\cap}S=\hat{x}\hat{y}\{xRy.xSy\}$ Df

关系R和S之间的逻辑乘就是既满R又满足S的关系，这里用命题的合取去表示关系方面的$\dot{\cap}$。

$*23\cdot03.R\dot{\cup}S=\hat{x}\hat{y}(xRy\cdot\vee.xSy)$ Df

R与S的逻辑加用命题方面的折取来表示。

$*23.04\cdot\dot{-}R=\hat{x}\hat{y}\{\sim(xRy)\}$ Df

这个定义是用命题方面的否定去表示关系方面的否定，即补关系。

$*23.05.R\dot{-}S=R\dot{\cap}\dot{-}S$ Df

这个定义是说，是R关系而不是S关系就是R同$\dot{-}$S的交。

以下我们看几个关系演算的定理：

$*23.8\cdot\dot{-}(\dot{-}R)=R$

非非R关系就是R关系

$*23.84\cdot\dot{-}(R\dot{\cap}S)=\dot{-}R\dot{\cup}\dot{-}S$

并非既R又S关系等于或者非R关系或者非S关系。这是关于关系的德摩根律。

$*23\cdot88\cdot(x,y).x(R\dot{\cup}\dot{-}R)y.$

这是关系方面的排中律。任何x与y有R或者非R的关系。

$*23\cdot89.(x,y).\sim\{x(R\dot{\cap}\dot{-}R)y\}$

这是关系方面的矛盾律。任何x与y有R而又非R的关系是假的。

由上可见，罗素在关系演算中虽然没有创造新东西，但是他用了一套得心应手的符号体系，比德摩根和皮尔士更严格、更形式、更科学地表述了关系演算，使之从代数的形式中解放了出来。

罗素认为，在关系逻辑里重要的东西是与类逻辑不同的概念，这些概念在以前是数理逻辑学家们没有弄清楚的。罗素用符号精确地表示了它们。其中最重要的是：

(1)摹状函项

数学中的一些函数，例如，x^2，$\sin x$，$\log x$等等,不是命题函

项。这些函数的意思是“对 x 有如此这般关系的项”，它们通过某个项对函数变目的关系来描述这个项，我们把这些函数称为摹状函项。例如，“$\sin\frac{\pi}{2}$”描述了数 1，但命题“$\sin\frac{\pi}{2}=1$”与用 1 代替 $\sin\frac{\pi}{2}$ 后的命题“1=1”是不同的，前者传达了有价值的知识，后者是不足道的。

摹状函项的一般定义是：

$*30\cdot01\cdot\ R'y=(\imath x)(xRy)\quad Df$

这是说，$R'y$ 意为对 y 有 R 关系的那个项 x。例如，如果 R 是父对子的关系，“$R'y$”意为“y 的父亲”。如果 R 是子对父的关系，“$R'y$”意为“y 的那个儿子”在这种情况下，如果 y 不是恰好有一个儿子，那么一切具有“$\Phi(R'y)$”形式的命题将是假的。摹状函项具有唯一性。

(2）逆关系

如果 R 是一个关系，那么当 xRy 成立时，y 对 x 具有的关系称为 R 的逆。大于是小于的逆，在前是在后的逆，丈夫是妻子的逆。等同关系的逆是等同，相异关系的逆是相异。R 的逆记为 $\breve{R}$（读为“R 的逆”）。当 $R=\breve{R}$ 时，R 称为对称关系，如相等关系；否则,称为非对称关系,例如“兄弟”关系,如果甲是乙的兄弟,乙可以是而不必是甲的兄弟，就是说乙或是甲的兄弟或是甲的姐妹。当 R 与 $\breve{R}$ 不相容，R 称为不对称关系，例如“丈夫”就是不对称的关系。

$\breve{R}$ 对 R 的关系称为“Cnv”。每一个关系有一个且只有一个逆关系；因此，一个关系的逆可以有两种记法：$\breve{R}$ 和 $Cnv'R$（即对 R 有关系 Cnv 的那一关系 $\breve{R}$），即 $\breve{R}=Cnv'R$。后一记法比较方便，是一个摹状函项。

综上所述，罗素对逆关系的分析以及记法比皮尔士都有发展。我们可以再举几条关于逆关系的重要定理：

*31 ·13. ⊢ . E! Cnv ‘ P

这是说，任一关系P有一个逆。“E!”读为“存在”。

* 31. 32. ⊢ : P= Q · ≡ · $\breve{P}$ $\breve{Q}$

两个关系等同当且仅当它们的逆等同。

*31 ·33. ⊢ . Cnv ‘ Cnv ‘ P=P

这是说，P的逆的逆就是P。

*31 ·11 · ⊢ : $x\breve{P}y$ · ≡ · yPx

*31 ·131 · ⊢ : x(Cnv ‘ P) y · ≡ . yPx

这两条定理是说，x对y有P的逆关系当且仅当y对x有P关系。

(3) 关系者和被关系者

给定一个关系R，对于一个给定的项y有R关系的项所构成的类，称为y的关系者。一个给定的项x对之有R关系的项所构成的类，称为x的被关系者。罗素用 $\overleftarrow{R}$ 表示y的关系者类对y的关系，$\overrightarrow{R}$ 表示x的被关系者类对x的关系。由此，使用摹状函项可得：$\overleftarrow{R}$ ‘ y= $\hat{x}$(xRy) 和 $\overrightarrow{R}$ ‘ x= $\hat{y}$(xRy) 。例如，如果R是父母对儿子的关系,那么 $\overleftarrow{R}$ ‘ y就是y的父母，$\overrightarrow{R}$ ‘ x就是x的儿子。我们应当注意的是，R ‘ y这个摹状函项表示唯一的一个项x，而 $\overleftarrow{R}$‘y表示唯一的一个类。我们有以下定义：

32. 01. $\overrightarrow{R}$ = $\hat{\alpha}\hat{y}$ { α = $\hat{x}$(xRy) } Df

32. 02 · $\overleftarrow{R}$ = $\hat{\beta}\hat{x}$ { β = $\hat{y}$(xRy) } Df

(4) 关系的前域，后域和场

如果R是任一关系，那么R的前域就是由那些对某物或它物有R关系的项而成的类，用D ‘ R表示。R的后域就是一些项的类，对这些项而言某物或它物有R关系，用 ꟻ ‘ R表示。R的场就是前域与后域的和。因此有：

D ‘ R= $\hat{x}$ {(∃y) . xRy}

ꟻ ‘ R= $\hat{y}$ {(∃x) . xRy}

C ‘ R= $\hat{x}$ {(∃y) : xRy · ∨ , yRx }

而D是前域对R的关系，ɑ 是后域对R的关系，C是场对R的关系，它们的定义如下：

∗ 33.01. D= $\hat{\alpha}\hat{R}$ [α = $\hat{x}${(∃ y) . x Ry}] Df

∗ 33.02. ɑ = $\hat{\beta}\hat{R}$ [β = $\hat{y}${(∃x) . x Ry}] Df

∗33 • 03 • C= $\hat{\gamma}\hat{R}$ [r= $\hat{x}${ (∃y) : xRy • ∨ • yRx}] Df

由这些定义可以导出D ‘ R, ɑ ‘ R和C ‘ R。

根据罗素的定义，关系者类与前域，被关系者类与后域有密切联系。我们可以看出，$\vec{R}$ ‘ y= $\hat{x}$(xRy) ，前域D ‘ R= $\hat{x}${(∃y) . x Ry }，因此有 $\vec{R}$ ‘y⊂D ‘ R，即关系者类包含于前域。同样有：被关系者类包含于后域。这是两条定理，罗素经过了严格证明(∗33.15和∗33.151)。

(5）两个关系的关系积

关系积的概念是德摩根首先提出的，他称之为关系的‘ 组合”，用LM表示。皮尔士明确提出了关系积的概念，并用存在量词加以定义：

$$(l b)_{ij} = \Sigma (l)_{ik} (b)_{kj}$$

罗素比皮尔士进了一大步，不但在记法上作了改进，而且在关系积的基础上引入关系平方的概念，此外还证明了一系列关于关系积的定理。

罗素把R和S的关系积记为“ R|S ”,其定义是：

∗ 34.01 •R|S= $\hat{x}\hat{z}${(∃y) . xRy. ySz } Df

这是说，R|S是在x和z之间成立的关系，这时有一个中间项 y 使得x对 y 有R关系，并且 y 对z有S关系。例如，兄弟关系和父亲关系的关系积就是伯叔关系，父亲关系和父亲关系的关系积就是祖父关系。

R和R的关系积称为R的平方。罗素给出了以下定义：

∗ 34.02 •R^2 =R|R Df

∗ 34 •03 •R^3 =R^2|R Df

关系积的一些重要定理有：

$*34 \cdot 2 \cdot \vdash . Cnv`(R|S) = \breve{S}|\breve{R}$

这一定理是说，关系积的逆是通过把每一因子变为逆，同时交换其次序而获得的。

$*34.21. \vdash .(P|Q)|R = P|(Q|R)$

这是说，关系积遵守结合律。

$*34.25. \vdash . P|(Q \dot{\cup} R) = (P|Q) \dot{\cup} (P|R)$

$*34.26 \cdot \vdash . (P \dot{\cup} Q)|R = (P|R) \dot{\cup} (Q|R)$

以上两条定理表明，关系积相对于关系的逻辑加遵守分配律。但是关系积相对于关系的逻辑乘,分配律的形式不是得到 = ”,而是得到 ⊂”(包含于）：

$*34 \cdot 23 \cdot \vdash . P|(Q \dot{\cap} R) \subset (P|Q) \dot{\cap} (P|R)$

$*34 \cdot 24 \cdot \vdash (P \dot{\cap} Q)|R \subset (P|R) \dot{\cap} (Q|R)$

以下还有几条关系积的重要定理：

$*34 \cdot 34 \cdot \vdash : R \subset P . S \subset Q . \supset . R|S \subset P|Q$

这是说，如果R包含于P并且S包含于Q，那么R和S的关系积包含于P和Q的关系积。

$*34 \cdot 36 \cdot \vdash . D`(P|Q) \subset D`P . \mathrm{d}`(P|Q) \subset \mathrm{d}`Q$

这一定理是说，P和Q的关系积的前域包含于P的前域，并且$P|Q$ 的后域包含于Q的后域。

$*34 \cdot 41 \cdot \vdash : E!P`Q`z . \supset . P`Q`z = (P|Q)`z$

这个定理是说，如果$P`Q`z$存在,那么它等于$(P|Q)`z$。设$Q$是孩子对父亲的关系，$P$是女儿对父亲的关系。这时假定$P`Q`z$存在，即$z$的那个孩子的那个女儿存在(这里要求$z$仅有一个孩子),那么$P`Q`z$等于$(P|Q)`z$，即z的那个孙女。罗素提醒人们说，如果假设变为$E!(P|Q)`z$，定理就不成立了，因为$(P|Q)`z$存在而$P`Q`z$可以不存在。在上例中，z可以有唯一的一个孙女，但如果z不仅有一个孩子，那么“z的唯一孩子的那个女儿”可以不存在。

由以上的关系积定义和定理，我们可以看出，罗素仅在这一方

面的理论比起德摩根和皮尔士的简单论述不知要丰富多少倍！

(6) 复数的摹状函项

摹状函项R‘y被定义为“那个对y有R关系的项”，这个项是唯一的。罗素利用摹状函项对逆关系，关系者和被关系者，前域、后域和关系场等等重要概念作了精确的定义。罗素又将摹状函项的概念作了推广，引入“复数的摹状函项”这一概念，记为“R“β”，意为：“那些对β的分子有R关系的项”。例如，如果β是伟人类，R是妻子对丈夫的关系，那么R“β意为“伟人的妻子们”。R“β是由那些具有被关系者（它们是β的分子）的关系者所构成的类，R“β对β的关系记为R_ϵ，它们定义如下：

$*37.01 \cdot R``\beta = \hat{x}\{(\exists y).y\,\epsilon\,\beta.xRy\}$ Df

$*37\cdot02 \cdot R_\epsilon = \hat{\alpha}\hat{\beta}(\alpha = R``\beta)$ Df

关于复数的摹状函项也有若干定理，我们不再引证。

在罗素的关系逻辑中，有一些关系具有重要作用。一种关系是“一对多”的关系，这种关系就是对于一给定的项而言，至多只能有一项与之有此关系。这种关系产生摹状函项，在英语中是用定冠词“the”的短语来表达的，如“the father of x”（x的父亲），“the double of x”（x的两倍），“the sine of x”（x的正弦），等等。

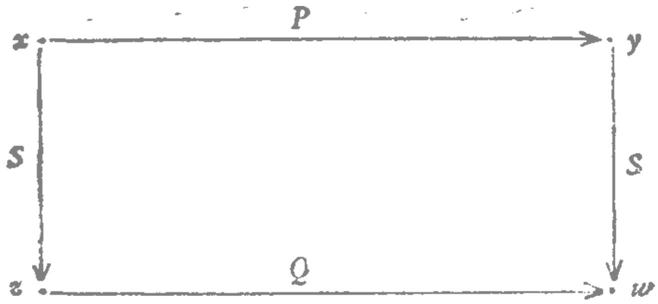
在一对多的关系中，一对一的关系是特别重要的一类。在这种关系中，不仅至多只有一个对于给定的项y有R关系的x，而且至多也只有一个y，使一个给定的项x对之有R关系。罗素利用这种一对一的关系定义了两个类之间的“相似”：

一类相似于另一类，就是在它们之间有一个一对一的关系。

罗素利用这种相似关系，比弗雷格更加明确、清晰地定义了自然数。

更重要的是，罗素用一对一的关系定义了P和Q关系的“相似”：如果有一个一对一的关系S，它的前域是P的关系场，后域是Q的关系场，并且若一项对另一项有P关系，则此项的对应者与

另一项的对应者有 $\hat{Q}$ 关系,反之,若一项对另一项有 Q 关系，则此项的对应者与另一项的对应者有 P 关系。罗素用下图说明了这个定义 :①



在这样的情况下，罗素称关系 S 是关系 P 和 Q 的 序次的关联者”。

第三种重要关系是序列关系。罗素认为他是给‘ 序列 ”这个词以一个确切意义的第一个人。一个序列即是一个序列的关系，简称序列关系，此关系具有以下三种性质：(1) 不对称性，即如果 x 对 y 有这种关系，y 对 x 就没有这种关系；(2）传递性，如果 x 对 y 有这种关系，并且 y 对 z 有这种关系，那么 x 对 z 就有这种关系(3) 连通性，如果 x 和 y 是这种关系的场中任何不同的两项，那么，不是 x 对 y 有这种关系，就是 y 对 x 有这种关系。

罗素认为，一对多的关系，一对一的关系和序列关系是逻辑和普通数学之间过渡的极为重要的关系。

罗素以他的关系逻辑作为雄厚的基础，给出了‘ 关系数 ”的定义：一给定关系的‘ 关系数 ”是所有与这给定关系相似的关系的类。然后罗素将它应用于序列，定义了关系数的加法和乘法，发展出一套完整的关系数算术，这是数学中非常值得重视的一个分支。罗素还将关系数算术用于对‘ 结构 ”进行研究，其根据是两个相似的关系有相同的结构。

---

①罗素 :《 数理哲》，学导论》，商务1982年版，第53页。

罗素认为，关系算术是他对《数学原理》一书的最重要的贡献。第二卷后半本的篇幅就是论述关系算术的。关系逻辑帮助罗素从逻辑推出了一部分数学，处理了集合论、算术和度量理论等。

我们完全同意哥德尔对罗素关系逻辑的评价，即数理逻辑“这门年轻的科学由于有了新的工具即抽象的关系理论而丰富起来了”。

三、摹状词理论

罗素认为，类和关系的符号和我们即将讲的摹状词符号都是不完全的符号。所谓“不完全的符号”就是孤立地没有意义的符号，只在某些上下文中被确定。这样的符号具有“使用中的定义”，可以用被定义项消去定义项。*21.01 就给出了关系符号“$xy\psi(x, y)$”的“使用中的定义”。下面我们来看看什么是摹状词。

我们所说的“摹状词”是“确定摹状词”的简称。在英语中，摹状词的结构是：

定冠词 the + 形容词 + 单数普遍名词。

例如，“the author of Waverley”（“《威弗莱》的作者”），“the morning star”（“晨星”）。在汉语中没有定冠词，而且名词也无单复数之分，一般由“形容词组 + 普遍名词”就可构成摹状词，例如“世界上最高的山峰”。有时可用“那个”代替定冠词，用以表示我们所指称的个体只有一个，例如，“15 和 19 之间的那个素数”。这样，就可以同表示一类事物的词组（例如，13 和 37 之间的那些素数）相区别。

罗素用“$(\iota x)(\phi x)$”代表“那个满足 ϕx 的项 x”。倒希腊字母“ι”相当于“那个”。上文说过，弗雷格和皮亚诺已经初步论述了摹状词，但仅仅是初步而已；罗素则全面系统地提出了关于摹状词的理论。罗素的理论主要有以下几个方面：

（一）专名与摹状词是有区别的，含有摹状词的命题同将专名代替摹状词后所产生的命题不同

罗素以“司各脱是《威弗莱》的作者”这个命题加以说明。在这个命题中，有一个专名“司各脱”和一个摹状词“《威弗莱》的作者”，它们代表同一个人。罗素认为，一个专名是一个单纯的符号，只能当主词用，代表“个体”一类东西。“单纯”符号不含有独立能成符号的部分,如“司各脱”虽有其部分“司”、“各”、“脱”,但这些部分不是符号。一个专名直接指示一个个体，而个体就是它的意义，它之所以有这个意义完全凭借自身而不凭借其它词的意义。但摹状词就不同了，它包含几个词，摹状词的意义是在一定的语境中从各个词的意义产生的。因此,“司各脱是《威弗莱》的作者”与“司各脱是司各脱”不同，前者是文学史上的一个事实，后者是一个不足道的自明之理。

罗素为了进一步论证专名与摹状词的区别，又以一个恒真的命题函项 $x=x$（同一律）为例。在这个命题函项中，任选一个专名去代 x，就一定得到一个真命题，例如，苏格拉底是苏格拉底。但是,如果不加别的前提,试图得出《威弗莱》的作者是《威弗莱》的作者”，那就陷入谬误了。罗素认为，如果“x是一个专名，则不论“x”是什么专名“$x=x$”与《威弗莱》的作者是《威弗莱》的作者”不是同样的命题。罗素认为,“$(\iota x)(\phi x)=(\iota x)(\phi x)$”要以“$(\iota x)(\phi x)$”的存在为条件，如果摹状词描述的东西不存在，那么“$(\iota x)(\phi x) = (\iota x)(\phi x)$”就是假的,例如“当今法国国王是当今法国国王”,“那个圆的正方形是那个圆的正方形”这些命题就是假的。

由上可见，专名与摹状词是不同的。

（二）含有摹状词的命题的定义

摹状词是不完全的符号，罗素给出的定义是“使用中的定义”，也就是消去摹状词的规则。

1．含有摹状词的命题的真假条件

罗素认为,“《威弗莱》的作者是司各脱”这个命题包含以下三个命题：

(1)“x写《威弗莱》”不常假；

(2)“如果x和y写《威弗莱》，则x和y同一”是常真的；

(3)“如果x写《威弗莱》，那么x是司各脱”常真。

以上三个命题合起来就是“《威弗莱》的作者是司各脱”的定义。

第一个命题是说，至少有一个人写《威弗莱》；第二个命题是说，至多有一个人写《威弗莱》。罗素将1)(2)合并为“有一个项c，使得‘x写《威弗莱》’常等值于‘x是c’”，这个合并的命题实际上是说，恰好有一个人写《威弗莱》。因此，“《威弗莱》的作者是司各脱”定义为“有一个项c，使得(i)‘x写《威弗莱》’常等值于‘x是c’并且(ii)c是司各脱”。一般地，“那个有性质ϕ的x有性质f”定义为“有一个项c，使得：(i)ϕx常等值于‘x是c’并且(ii)fc是真的”。完全用符号表示就是：①

$$f\{(\iota x)(\phi x)\}.=:(\exists c):\phi x.\equiv_x.x=c:fc \quad Df$$

以上定义给出了包含摹状词的命题的真假条件，只有三条都满足，这种命题才是真的。如果第一条、第二条满足了而第三条不能满足，则这种命题为假，例如，“世界上最高的山峰是阿尔卑斯山”。如果第一条或第二条不能满足，即摹状词不具有唯一性，罗素就把这种命题理解为假。这里有两种情况：一种是摹状词根本无所指称，例如“那个永动机是自动的”；另一种是摹状词指称两个或两个以上的对象，例如“动物园里的那个大象在吃草”。根据罗素的定义，这两类命题一律为假，也就是说，它们是有意义的。罗素不区别“假”和“无意义”。

2.摹状词存在的定义

“《威弗莱》的作者存在”是什么意思呢？罗素说，它的意思就是上面第一条和第二条的结合，即“有一个项c，使得‘x写《威弗莱》’常等值于‘x是c’”，②也就是我们所说的“恰好有一个人写

①P. M Vol. 1, P. 68。

②前引《数理哲学导论》第177页。

《威弗莱》”。一般地，那个有性质φ的对象存在”定义为“有一个项 b 使得 φx 常等值于‘x是 b’”。完全用符号表示就是①

$$*14.02.\ E!(\imath x)(\phi x) .=: (\exists b): \phi x . \equiv_x . x=b \quad Df$$

“E!”读为“存在”，定义项是说“恰好有一个具有性质φ的 b”。

“E!(ɿx)(Φx)”总是有意义的，或者真，或者假。但是，如果 a 是一个专名，那么“E! a”是无意义的，因为“E! a”不能用形式符号来下定义。现在我们提一个问题：荷马是不是存在？罗素认为，如果荷马是一个专名，这个问题就是无意义的；如果荷马当作一个缩写的摹状词，这个问题就是有意义的，我们可以用“《伊利亚特》和《奥德塞》的作者”去替换它。总之，所谓存在只有用于摹状词才有意义，用于专名则无意义。罗素认为，对所有专名都可这样考虑。

3. 摹状词的初现和次现之间的区别

根据罗素对含有摹状词的命题的真假条件的分析，如果第一条或第二条不能满足，即摹状词不具有唯一性，那么这种命题为假。这种说法有弊病，这时 f(ɿx)(φx) 同 ～f(ɿx)(Φx) 均假，但通常人们认为它们应该互相矛盾，不能同假。罗素为了克服这个缺点，对摹状词的出现区别为初现和次现，把摹状词作为约束词，用以指明到底哪一部分公式为假。

所谓一个摹状词在一个命题中“初现”，就是指这个命题是在某个命题函项 f x 中用该摹状词代 x 而得到的。例如，“当今法国国王是秃顶的”这个命题是在“x是秃顶的”这个命题函项中以“当今法国国王”代 x 而得到的，“当今法国国王”就是初现，显然这个命题是假的。一般说来，凡在一个命题中，摹状词无所指称并在该命题中是初现，则该命题为假。

所谓一个摹状词在一个命题中“次现”，就是指在某个命题函项 f x 中用该摹状词代 x 而得到的命题仅是这个命题的一个部分。

---

①P. M Vol. 1. P. 174。

举个例子说，“当今法国国王不是秃顶的”，这是有歧义的，罗素说：“如果我们原有‘x是秃顶的’，然后以‘当今法国国王’代‘x’，然后再否定这结果，那么‘当今法国国王’是次现，并且命题为真；但若我们原有的是‘x不是秃顶的’，而后以‘当今法国国王’代‘x’，那么‘当今法国国王’是初现，并且命题为假。”①这就是说，“当今法国国王不是秃顶的”可以理解为“并非‘有当今法国国王而他是秃顶的’”，用罗素的符号可表示为：

$$\sim\{(\exists c):\phi x.\equiv_x.x=c:fc\};$$

另一方面，也可理解为“有当今法国国王而他不是秃顶的”，用符号表示就是：

$$(\exists c):\phi x.\equiv_x.x=c:\sim fc。$$

为了区别以上两种情况，罗素用 $\sim\{[(\imath x)(\phi x)].f(\imath x)(\phi x)\}$ 表示第一种情况，即“$(\imath x)(\phi x)$在其中有次现”；$[(\imath x)(\phi x)].\sim f(\imath x)(\phi x)$ 表示第二种情况，即“$(\imath x)(\phi x)$在其中有初现”。②这表明，摹状词有辖域问题，在“次现”时，$(\imath x)(\phi x)$的辖域是部分公式 $f(\imath x)(\phi x)$，而在“初现”时，辖域是全部公式 $\sim f(\imath x)(\phi x)$。通常我们把“当今法国国王不是秃顶的”理解为“初现”的命题“有当今法国国王而他不是秃顶的”，这是一个假命题，与“当今法国国王是秃顶的”同为假，不能应用矛盾律；但是我们把“当今法国国王不是秃顶的”理解为“次现”的命题“并非‘有当今法国国王而他是秃顶的’”，这是一个真命题，与“当今法国国王是秃顶的”互相矛盾，而不是皆假。由上可见，如果摹状词是“次现”，那么即使摹状词不存在，有关公式可以是真的；但如果摹状词是“初现”，那么若它不存在，则有关公式为假。当摹状词存在时，“初现”和“次现”具有等价的结果。

在区别初现和次现的基础上，罗素对上述包含摹状词的命题

---

①前引《数理哲学导论》第169页。

② P. M Vol. Ⅰ, pp. 68～70。

的定义作了修改，引进了摹状词作为前束词：

$*14.01\ [(\iota x)(\phi x)].f(\iota x)(\phi x) .=: (\exists c) : \phi x . \equiv_x . x=c : fc \quad Df$

这个定义与以前的定义实质上是一致的，只不过这里更加精确，加上摹状词作为前束词，明确了摹状词的辖域，从而避免了初现和次现的混淆。

（三）关于摹状词的一些重要定理

$*14.18 \cdot \vdash :. E!(\iota x)(\phi x) . \supset :. (x).\psi x . \supset . \psi(\iota x)(\phi x)$

这是说，当$(\iota x)(\phi x)$存在时，它就具有属于一切事物的性质ψ。若它不存在，定理就不成立。罗素举例说，当今法国国王不具秃顶或不秃顶的性质。

$*14.21 \vdash : \psi(\iota x)(\phi x) . \supset . E!(\iota x)(\phi x)$

这个定理说明，摹状词的存在十分重要，摹状词存在是含摹状词的命题为真的必要条件。既然$(\iota x)(\phi x)$有性质ψ，那么它必定描述某个东西，因此$(\iota x)(\phi x)$存在。这条定理可从定义得出，因为$E!(\iota x)(\phi x)$是$\psi(\iota x)(\phi x)$的一个部分。如果$(\iota x)(\phi x)$不存在，那么$(\iota x)(\phi x)$有性质ψ就是假的了。

$*14.202 \cdot \vdash :. \phi x . \equiv_x . x=b : \equiv : (\iota x)(\phi x)=b$
$: \equiv : \phi x . \equiv_x . b=x : \equiv : b=(\iota x)(\phi x)$

这是说，（对所有x而言，φx等值于x=b）等值于（那个有性质φ的x=b），等值于（对所有x而言，φx等值于b=x），等值于（b=那个有性质φ的x）。

由第一个等值式可得：

$*14.204 \cdot \vdash : E!(\iota x)(\phi x) . \equiv . (\exists b) . (\iota x)(\phi x)=b$

这是说，$(\iota x)(\phi x)$存在就是有某个b使得它等于b。

$*14.205 . \vdash \psi(\iota x)(\phi x) . \equiv : (\exists b) . b=(\iota x)(\phi x) . \psi b$

这个定理是说，$(\iota x)(\phi x)$有性质ψ，等于说有某物，它是有性质φ的x并有性质ψ。

$*14.28 \cdot \vdash : E!(\iota x)(\phi x) . \equiv . (\iota x)(\phi x) = (\iota x)(\phi x)$

这是说，$(\iota x)(\phi x)$有自返性当且仅当它存在。如果它不存

在，则$(\iota x)(\Phi x)=(\iota x)(\Phi x)$就是假的。例如"当今法国国王是当今法国国王"是一个假命题。摹状词的等同的对称性，无需假定存在：

$*14\cdot13.\ \vdash:a=(\iota x)(\Phi x).\equiv.(\iota x)(\phi x)=a$

$*14\cdot131.\vdash:(\iota x)(\Phi x)=(\iota x)(\Psi x).\equiv.(\iota x)(\psi x)=(\iota x)(\phi x)$

摹状词的等同的传递性，也无需存在的假定。

（四）罗素的摹状词理论的缺陷以及其它的处理方法

如前所述，罗素对摹状词的处理是，如果一个摹状词不具有唯一性（即不是至少有一个或者不是至多有一个），则含此摹状词的命题一律为假。例如，"1和2之间的那个素数"和"13和37之间的那个素数"，按照罗素的看法均为假，而不是无意义，他不区别"假"和"无意义"。严格说来，这种处理方法是不够妥当的，离自然语言及数学中的习惯用法是较远的。他为了克服这个缺点，采用了一套复杂符号来区别摹状词的"初现"和"次现"，也有过于人为的缺点。罗素的理论尽管有这些缺点，但瑕不掩瑜，它推进了后人对这方面进行研究。在罗素之后有好几种摹状词理论，这里我们提出两种。

1. 如果摹状词不具有唯一性，则含此摹状词的公式无意义，不是一个合式公式。

这是希尔伯特（D. Hilbert, 1862-1943）和贝尔纳斯在1934年的《数学基础》中采用的方法。他们说，为了尽可能和日常语言，特别是数学中的实际用法紧密结合，这种方法确定：只有当唯一性存在时，摹状词才有意义，才能被引用。当唯一性不成立时，摹状词无意义，不允许使用。这种方法有一个缺点，即把$(\iota x)(\Phi x)$是否有意义决定于"$E!(\iota x)(\Phi x)$"是否成立，而后者不能在有穷步骤内决定。后来贝尔纳斯作了改进，提出了以下办法：

2. 如果摹状词不具有唯一性，则它等于一个个体变元，或者指称某一先行规定的事物。

贝尔纳斯认为，当摹状词没有唯一性时，含摹状词的公式不是

无意义，其真假有待进一步确定。他引进了一个“参数”，将摹状词记为“$(\eta y)(\phi x)$”。当摹状词具有唯一性时，$(\eta y)(\phi x)$ 等于使 ϕ 成立的唯一的 x；当摹状词不具有唯一性时，$(\eta y)(\phi x)$ 等于 y。这里，y 是参数。在某个数学公理系统中，如果需用摹状词，我们可用某个特定个体来代表那个参数，例如在数论系统中可用数 0。贝尔纳斯引进参数的方法可用两条公理来规定。在现有处理摹状词的方法中，贝尔纳斯的这种方法是比较好的。

罗素关于摹状词存在的定义，在逻辑史上具有重要意义，为“存在逻辑”的研究开辟了道路。罗素的定义的核心是，否定“存在”是个体的属性。这本是康德的一种观点。罗素用数理逻辑的语言，定义了摹状词存在，但在罗素的系统中不能定义“E!a”，也就是说，这个符号在罗素的系统中是无意义的。我们认为，罗素的定义只是一种方案，在罗素的逻辑系统中，“E!a”无意义，并不等于在别的系统中无意义，更不等于客观上无意义。在罗素之后，存在逻辑得到了发展，建立了一些系统，提出了一些与罗素定义不同的新的存在定义。这里我们仅提出一种。当代著名逻辑学家莱肖尔（N. Rescher）在《存在逻辑》一文中，①提出了一个较好的存在定义。他把 E!x 定义为：

$$(\lambda x)(\exists p)[Px \& (\exists y)\sim Py],$$

这个定义是说，如果一个东西具有某种并非为一切东西所具有的性质，则称这个东西存在。根据这一定义，某物具有与自身同一的性质，但我们不能断定某物存在。记号“$(\lambda x)A(x)$”表示 A 的内涵抽象，也就是表示“A 是一种属性”。莱肖尔对上述定义提出了一个规定：“$\exists p$”所要求的谓词域由“质性质”的谓词构成。所谓“质性质”的谓词是指满足以下两个条件的谓词：

1. 语言中的初始谓词，

---

① Rescher, Topics in Philosophical Logic, D. Reidel Publishing Company, 1968, pp. 138—161.

2. 从初始谓词只借助析取或合取加以定义的谓词，也就是说，这样的定义不使用否定，也不涉及特殊的个体。

莱肖尔作这样规定的目的是，保证从定义推不出($\forall$x) E !x (一切东西都存在)的结论。

（五）罗素的摹状词理论的哲学问题

罗素的摹状词理论本是逻辑演算的一个方面。但是，罗素还是一位著名的唯心主义哲学家，他对摹状词理论作了唯心主义的哲学概括。

罗素说“: 逻辑是哲学的本质 ”“; 只要是真正的哲学问题,都可归结为逻辑问题 ”。①根据这个思想,他认为“; 哲学中间的一大部分可以归结为一种可以称为‘ 句法,的东西的 ”“; 哲学句法对处理传统问题是用处很大的 ”；他的摹状词理论表明了“ 哲学句法的用处 ”。②

根据罗素的论述，他的摹状词理论是为了批判许多逻辑学家和哲学家的一个著名论点,即 有虚构的对象 '而制定的。例如,奥地利唯心主义哲学家梅农(Meinong) 认为，我们说话可以说到“ 那座金山 ”、“ 那个圆的正方形 ”等等语词,以这些名词为主词可以造出许多真的命题,例如“; 金山不存在 ”、“ 圆的正方形不存在 ”等等,所以它们是一种 不实在的客体 ”,某种 逻辑上的实在 ”,要不然以它们为主词的命题就是没有意义的。

罗素用他的“ 不完全符号 ” 的理论，利用消去摹状词的两个定义，批判了梅农等人的观点，指出 :“ ‘ 金山不存在，的意思就是：‘ 没有一个实体c，使得当x是c的时候，‘ x是金的并且是山 ’是真的,否则就不是真的。’有了这个定义,我们说‘ 金山不存在 ’时意思指的究竟是什么这个难题就没有了。根据这种理论，‘ 存在，是只能用来给摹状词下断语的。我们可以说‘《 威弗莱》的作者存

①洪谦主编 :《 西方现代资产阶级哲学论著选辑》，商务印书馆 1964年版，第221页。

②同上，第245页。

在,,说‘ 司各脱存在,却是糟糕的语法,或者糟糕的句法。这就把从柏拉图的《 泰阿泰德》篇以来两千多年关于‘ 存在,的糊涂思想清除掉了。”①

罗素对梅农的批判，抓住了梅农的一个错误方面，即把空摹状词说成是 不实在的客体 "、逻辑实在 ”。他认为，空摹状词在文法上可以是一个有意义的命题的主词，但经过分析，消去了空摹状词，就没有这样一个主词了。罗素强调，在命题的分析中，不能承认“ 不实在 ” 的东西。罗素对梅农的批判是机智的。列宁曾经指出，当一个唯心主义者批判另一个唯心主义者的时候对唯物主义是有利的。马克主义者应该欢迎这样的批判。但是罗素毕竟是一个唯心主义哲学家，他对梅农的批判是从唯心主义的新实在论立场出发的。他说 :“ 我主张，动物学既不能承认独角兽，逻辑也应该同样地不能承认，因为逻辑的特点虽然是更抽象、更普遍，然而逻辑关心实在世界也和动物学一样的真诚。说独角兽存在于纹章中,存在于文学中,或者存在于幻想中,是一个非常可笑的,没有价值的遁辞。在纹章中存在的并不是一个血肉做成的，能自动行动，有呼吸的动物。存在的只是一个图象，或者文字的描述。同样地，如果主张哈姆雷特存在于他自己的世界中，即存在于莎士比亚幻想的世界中，就象拿破仑存在在通常的世界中一样地真实，这种说法不是有意惑入，便是不堪信任的糊涂话。只有一个世界，这就是‘ 实在的，世界 : 莎士比亚的幻想是这世界的一部分，在写哈姆雷特时他所有的思想是实在的。在读这剧本时，我们所有的思想也是实在的。只有在莎士比亚以及读者心中的思想，情绪等等是实在的，此外并没有一个客观的哈姆雷特，这是虚构的事物的本质。……实在的意识在逻辑中很重要，谁玩弄戏法，佯称哈姆雷特有另一种实在，这是在危害思想。在正确地分析有关假对象的命题时，所谓假对象即独角兽，金的山，圆的方等等，对于实在的健全意识

①同上，第246页。

是必需的。”①哈姆雷特，独角兽，金的山，圆的方等等这些东西不是“实在”，那么“实在”是什么呢？就是“幻想，思想，情绪”的世界。在另一些著作中，罗素把“实在世界”说成是由“感觉材料”构成的世界。我们和罗素的分歧不在于要不要批判梅农的“实在”，而在于批判了梅农的“虚构的对象”、“不实在的客体”、“逻辑实在”之后，空专名、空摹状词的基础是什么？罗素认为，这些东西没有客观基础，只存在于罗素的“实在”世界中，即“幻想，思想，情绪”的世界中；“感觉材料”的世界之中。我们认为，空专名、空摹状词是对客观物质对象的一种曲折反映，有的是不正确的，甚至是虚幻的。小说中的人物，如“哈姆雷特”是有现实的模特儿的，决不是莎士比亚主观想象的产物；“独角兽”、“金的山”、“圆的方”是对客观事物的不正确的、虚幻的反映，但它们在物质世界也有基础，决不是纯思维的产物。没有客观的“圆”和“方”，就不会有空摹状词“圆的方。

关于存在问题，上文说过，罗素的方案只是数理逻辑中的一种，并不是唯一的一种。罗素把它当成“哲学句法”，自诩清除掉了“两千多年来关于‘存在，的糊涂思想”，这是我们也不能同意的。存在逻辑现正在发展，有的系统可以给出“个体存在”的定义。我以为，我们应当总结现代的存在逻辑的成果，然后作出马克思主义的哲学概括。在这方面，恩格斯的论述可以作为我们的指导思想：“当我们说到存在，并且仅仅说到存在的时候，统一性只能在于：我们所说的一切对象是存在的，实有的。它们被包含在这种存在的统一性中，而不在任何别的统一性中；一般地断言它们是存在的，这不仅不能赋予它们其他共同的或非共同的特性，而且暂时排除了对所有这些特性的考虑。只要我们离开存在是所有这些事物的共同点这一简单的基本事实，哪怕离开一毫米，这些事物的差别就开始出现在我们眼前。②杜林不懂得这一点，认为世界的统一

①罗素：《数理哲学导论》，第159—160页。
②《马克思恩格斯选集》，第3卷，第82页。

性在于它的存在，恩格斯批判说：“虽然世界的存在是它的统一性的前提，因为世界必须先存在，然后才能是统一的，但是世界的统一性并不在于它的存在。……世界的真正的统一性在于它的物质性”。①按照罗素的“哲学句法”，只有“摹状词存在”，其余一切说法，如“个体存在”、“世界存在”等都不合“哲学句法”，那么，世界还有什么统一性可言呢？

综上所说，我们对罗素的摹状词理论给予高度评价，它在数理逻辑发展史上第一次全面、系统、科学地论述了摹状词学说，丰富了数理逻辑的内容，对表述数学原理提供了良好的工具，为以后的摹状词理论和存在逻辑的发展奠定了基础。但是，罗素对摹状词理论所做的哲学结论是新实在论的观点，以主观的唯心的“实在世界”否定了客观的物质世界。这是我们断然不能同意的。

第四节　逻辑演算的发展

一、命题演算和谓词演算的不同系统

弗雷格和罗素的逻辑演算系统现已成为一阶逻辑的基础。在后来的发展中，它们得到了改进和完善。

上文说过，卢卡西维茨证明了弗雷格命题演算的第三条公理可从前两条公理推出，弗雷格的命题演算可简化成三条公理：

（1）$p \to (q \to p)$，

（2）$[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$，

（3）$(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$。

令人感兴趣的是，卢卡西维茨提出了由三条公理组成的命题演算系统来取代弗雷格的系统，这三条公理是：

（1）$(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$，

①同上，第83页。

(2) $(\neg p\rightarrow p)\rightarrow p$,

(3) $p\rightarrow(\neg p\rightarrow q)$。

第一条公理是假言三段论律。第二条公理是一种怪论：如果“非p蕴涵p”那么p，这是首先由斯多阿学派表述的。第三条公理也是一种怪论，它实际上是说，从p和$\neg p$（非p）这对矛盾命题可得任何命题，中世纪逻辑学家已作了论述。

我们曾经说过，皮尔士和舍弗认识到有可能用一个初始概念来定义命题演算的一切联结词。法国逻辑学家尼考(J. Nicod)在1917年取舍弗的竖函项作为初始概念，他证明命题演算只用以下单独的一条公理：

$$[p|(q|r)]|(\{[t|(t|t)]|\{(s|q)|[(p|s)|(p|s)]\}\}),$$

以及以下的一条推理规则：

由两公式A和A(B|C)可得新公式C，这条规则实际上是分离规则。

罗素在1925年的《数学原理》第二版导论中提出，应该用尼考的命题演算系统来代替第一版的系统。

《数学原理》第一版的系统在1926年经过贝尔纳斯的改进，去掉了不独立的结合公理，因此由以下四条公理组成：

(1) $(p\vee p)\rightarrow p$

(2) $q\rightarrow(p\vee q)$

(3) $(p\vee q)\rightarrow(q\vee p)$

(4) $(q\rightarrow r)\rightarrow[(p\vee q)\rightarrow(p\vee r)]$。

这一公理系统比较流行，1928年希尔伯特(D. Hilbert, 1862—1943)和阿克曼(Ackermann)合著的《理论逻辑基础》一书采用了这个系统，只把公理(2)稍微改动了一下，变为$p\rightarrow p\vee q$。我国王宪钧教授写的《数理逻辑引论》也采用了这个系统。

有时命题演算的公理系统，一开始便把五个基本联结词都引进来，这样的系统也有优点。希尔伯特和贝尔纳斯在1934年为此构造了以下的系统：

Ⅰ（1） $p\to(q\to p)$
（2） $[p\to(p\to q)]\to(p\to q)$
（3） $(p\to q)\to[(q\to r)\to(p\to r)]$
Ⅱ（1） $p\land q\to p$
（2） $p\land q\to q$
（3） $(p\to q)\to[(p\to r)\to(p\to q\land r)]$
Ⅲ.（1） $p\to p\lor q$
（2） $q\to p\lor q$
（3） $(p\to r)\to[(q\to r)\to(p\lor q\to r)]$
Ⅳ.（1） $(p\leftrightarrow q)\to(p\to q)$
（2） $(p\leftrightarrow q)\to(q\to p)$
（3） $(p\to q)\to[(q\to p)\to(p\leftrightarrow q)]$
Ⅴ.（1） $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$
（2） $p\to\neg\neg p$
（3） $\neg\neg p\to p$

Ⅰ组只包含蕴涵词 →"（如果……那么……），Ⅱ组包含合取词 ∧"（并且）和蕴涵词，Ⅲ组包含析取词 ∨"（或者）和蕴涵词，Ⅳ组包含等值词"↔"和蕴涵词，Ⅴ组包含否定词"¬"和蕴涵词。

为了在命题演算中省去代入规则，冯·诺意曼（J. von Neumann, 1903—1957）在1927年提出用公理模式代替公理的方案。公理模式是用语法变元而不是用形式变元陈述的，一个公理模式可以代表无穷多条公理。弗雷格的命题演算系统可用以下三个公理模式来表示：

（1） $P\to(Q\to P)$，
（2） $[P\to(Q\to R)]\to[(P\to Q)\to(P\to R)]$，
（3） $(\neg P\to\neg Q)\to(Q\to P)$。

现在的数理逻辑教科书中所采用的一阶谓词演算系统，主要有两种：弗雷格式的和罗素式的。

弗雷格式的一阶谓词演算系统一般用公理模式表示，除三个命题演算公理模式外，有以下两个量化的模式：

(4) $(\forall\alpha)(P\to Q)\to[P\to(\forall\alpha)Q]$，如果α在P中没有自由出现；

(5) $(\forall\alpha)P(\alpha)\to P(\beta)$，如果对P(α)中的α是自由的（即在P(α)中α的自由出现不在量词(∀β)的辖域中）。

例如，哈密尔顿的《数学家的逻辑》就采用了这种系统。

罗素式的一阶谓词演算系统，首先由希尔伯特和阿克曼在1928年的《理论逻辑基础》一书中采用，除四条命题演算公理外，还有以下两条关于量词的公理：

(5) $(\forall x)F(x)\to F(z)$，

(6) $F(z)\to(\exists x)F(x)$。

希尔伯特和阿克曼在1938年出版了该书的第二版，主要对谓词演算代入规则作了精确的表述。

我国王宪钧教授的《数理逻辑引论》（北京大学出版社，1982）也采用了这个系统。

在1934年，德国逻辑学家甘岑（G. Gentzen）提出了自然推理的一个规则系统。甘岑试图使公式间的形式推理更接近于数学中所常用的那种证明程序。甘岑的系统不用逻辑公理，而只用推理模式,现列举如下：

UE

$$\frac{A \quad B}{A\wedge B}$$

UB

$$\frac{A\wedge B}{A} \qquad \frac{A\wedge B}{B}$$

OE

$$\frac{A}{A\vee B} \qquad \frac{B}{A\vee B}$$

OB

$$\frac{A\vee B \quad \overset{[A]}{C} \quad \overset{[B]}{C}}{C}$$

AE

AB

$$\frac{F(a)}{(\forall x)F(x)} \qquad \frac{(\forall x)F(x)}{F(a)}$$

EE EB

$$\frac{F(a)}{(\exists x)F(x)} \qquad \frac{(\exists x)F(x) \quad \begin{matrix}[F(a)]\\ C\end{matrix}}{C}$$

FE FB

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \to B} \qquad \frac{A \quad A \to B}{B}$$

NE NB

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \text{人}\end{matrix}}{\neg A} \qquad \frac{A \quad \neg A}{\text{人}} \qquad \frac{\text{人}}{D} \qquad \frac{\neg\neg A}{A}$$

在以上模式中，[A] 等等代表假定，OB(析取消去规则）是说，从 A∨B，假定A得到C和假定B得到C，可以推出C。“ 入 ”代表“ 假 ”。字母a表示一个变元。甘岑对AE(全称引入）和EB(存在消去）作了特殊的规定，其中的变元a称为模式的特有变元，AE的特有变元不可以出现在由(∀x) F (x) 所表示的公式中，不可以出现在这个公式所依赖的任意一个假定公式中；EB中的特有变元不可以出现在由 (∃x) F(x) 所表示的公式中，不可以出现在C所表示的公式中，也不可以出现在这个公式所依赖的任何一个假定公式中，除非假定公式属于这个模式，并且是用F(a）所表示的。

在自然推理演算中，推导呈树枝形，例如：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{F(a)}}{(\exists x)F(x)}\,\text{EE} \qquad \overset{1}{\neg(\exists x)F(x)}}{\text{人}}\,\text{NB}}{\neg F(a)}\,\text{NE}_2}{(\forall y)\neg F(y)}\,\text{AE}}{\neg(\exists x)F(x) \to (\forall y)\neg F(y)}\,\text{FE}_1$$

在这个推导中，编号1和2下面的公式是假定公式。由F(a)通过EE（存在引入）得(∃x)F(x)，由(∃x)F(x)和假定公式¬(∃x)F(x)据NB（否定消去）得到入（假），再据NE（否定引入）可得¬F(a)，这就除去了假定公式F(a)，它的编号是2，因此，所使用的模式NE，写成“NE2”。由¬F(a)据AE（全称引入）可得(∀y)¬F(y)，由此据FE（蕴涵引入）得到¬(∃x)F(x)→(∀y)¬F(y)，这就除去了假定公式1，即¬(∃x)F(x)。这表明，公式¬(∃x)F(x)→(∀y)¬F(y)是与假定无关的恒真公式。

甘岑的自然推理演算等价于一阶谓词演算。在甘岑的系统中，命题演算的四条公理很容易推出来。

(1) $(p\vee p)\to p$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{p\vee p}\qquad \overset{1}{p}\qquad \overset{1}{p}}{p}\,\mathrm{OB1}}{(p\vee p)\to p}\,\mathrm{FE2}$$

(2) $p\to(p\vee q)$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{p}}{p\vee q}\,\mathrm{OE}}{p\to(p\vee q)}\,\mathrm{FE1}$$

(3) $(p\vee q)\to(q\vee p)$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{p\vee q}\qquad \dfrac{\overset{1}{p}}{q\vee p}\,\mathrm{OE}\qquad \dfrac{\overset{1}{q}}{q\vee p}\,\mathrm{OE}}{q\vee p}\,\mathrm{OB1}}{(p\vee q)\to(q\vee p)}\,\mathrm{FE2}$$

(4) $(p\to q)\to[(r\vee p)\to(r\vee q)]$

可用FB, OF和FE而得到。

关于量词的公理：(5) $(\forall x)F(x)\to F(y)$，可用AB和FE

得到；(6) F(y) → (∃x) F(x)，可用 EE 和 FE 得到。

由上可见，一阶谓词演算中的一个公式是在自然推理演算中可证的，当且仅当它在一阶谓词演算中可证。

我国逻辑学家胡世华和陆钟万合著的《数理逻辑基础》(科学出版社，1981）也构造了一种自然推理系统。

皮亚诺、弗雷格、罗素，以及后来一些逻辑学家采用了不同的符号体系来表述命题演算和谓词演算。为便于查阅，今列表如下：

	皮亚诺，罗素	希尔伯特	其他变形	卢卡西维茨	本书
否　定	$\sim A$	$\bar{A}$	$-A, \neg A$	N_p	$\neg A$
合　取	$A.B$	$A\&B$	$AB, A\wedge B$	K_{pq}	$A\wedge B$
析　取	$A\vee B$	$A\vee B$		A_{pq}	$A\vee B$
蕴　涵	$A\supset B$	$A\to B$		C_{pq}	$A\to B$
等　值	$A\equiv B$	$A\sim B$	$A\longleftrightarrow B$	E_{pq}	$A\longleftrightarrow B$
全称量词	$(x)F(x)$	$(x)F(x)$	$\forall xF(x), \wedge xF(x)$	$\Pi_x\phi x$	$(\forall x)F(x)$
存在量词	$(\exists x)F(x)$	$(Ex)F(x)$	$\exists xF(x), \vee xF(x)$	$\Sigma_x\phi x$	$(\exists x)F(x)$

二、逻辑演算的元理论

从总体上对命题演算和谓词演算系统的性质进行研究，称为元逻辑理论。命题演算和谓词演算系统的性质有三个：一致性(无矛盾性)、独立性和完全性。下面我们对两个系统分别加以考察。

(一) 命题演算的元理论

我们先讨论命题演算的无矛盾性。

命题演算是一致的(或无矛盾的)，当且仅当在系统之内没有任何公式 A 使得 A 与 ¬A 均可证。这一定义也等于说，并不是每个公式都是可证的。

命题演算的一致性证明首先由美国逻辑学家波斯特 E. L. Post, 1897-1954)在 1921 年发表的论文《初等命题的一般理论导论》中给出。①卢卡西维茨在 1925 年，希尔伯特和阿克曼在

① 载 F. G pp 264-283。

1928年也给出了命题演算的一致性证明。这里我们给出希尔伯特和阿克曼的证明，其基本方法是作出一种算术解释。

命题变元p, q, r, . . . 当作算术变元，只取值0和1。 p ∨ q理解为算术积, ¬p定义为： ¬0 等于1, ¬1等于0。每一复合命题都是基本命题的一个算术函数，并且也只取0与1两个值。公理(1）至(4）是等于0的。首先，¬p ∨ p永取值0。由此可得 ¬(p ∨ p) ∨ p[即公理(1)] 也为0。其次，公理(2）可变形为 ¬p ∨ (p ∨ q)，再变形为(¬p ∨ p) ∨ q, ¬p ∨ p为0，0 ∨ q也等于0，因此公理2等于0。仿此，公理(3）和(4) 也等于0。

从公理应用代入规则和分离规则后，得出的新公式仍为0。就代入来说，当把一个变元代以一个表达式后，变元所取得的值域绝对不会扩大。就分离来说，其规则可写成由A与 ¬A ∨ B可得B。既然A永取值0，故¬A 永取值1, 因而¬A ∨ B与B同值；¬A ∨ B永取值0，因此B也永取值0。

由上可得，如果对p与 ¬p中的p代入以同样的复合命题时所得的两个公式不可能都具有永等于0的性质；事实上，当其中一个取值为0时，另一个必取值为1。

上文说过，贝尔纳斯在1926年的论文《〈数学原理〉的命题演算的公理探讨》中，证明了罗素的结合公理是不独立的。贝尔纳斯在这篇论文中首先用算术解释的方法证明了由四条公理组成的命题演算系统具有独立性。下面我们采用希尔伯特改进了的表述方法。

首先证明公理(1) 的独立性。命题变元可取剩余类0, 1和2 (mod4)。析取号∨表示算术乘法，¬p可如下定义： ¬0 为 1, ¬1 为 0, ¬2为2。根据这种解释，公理(2)、(3)、(4）的值永等于0，¬p ∨ p也等于0。应用两条规则后，这个性质也遗传给由这四个公式所推出的公式。但公理(1) 不是永等于0，取p为2，则 ¬(2 ∨ 2) ∨ 2= ¬0 ∨ 2=1 ∨ 2=2。因此,公理 1)不能从 2)、(3)、(4) 推出,也不能换成 ¬p ∨ p。证明其余3条公理的独立性,每次给出

一种算术解释，证明方法与以上类似，这里从略①。

命题演算的完全性有两种定义。一种是语义完全性：命题演算是语义完全的，当且仅当命题演算的永真公式（重言式）都是可证的。另一种是语法完全性（或波斯特意义下的完全性）：命题演算是语法完全的，当且仅当把一个不可证的公式加入到公理中去，其结果是不一致的，即永远产生一个矛盾。波斯特在1921年证明了命题演算具有这两种意义的完全性。希尔伯特和阿克曼在1928年对波斯特的证明作了改进。证明语义完全性的方法是使用合取范式。设A为任一重言式， 它有一个与之等值的合取范式B，每一合取式项B； 也是重言式，因此必含有一命题变项及其否定。由 $p \vee \neg p, p \vee \neg p \vee q$ 等等是可证的，因而每一个B；也可证。从而，B可证。由此可得，A可证。证明语法完全性也应用合取范式。设A为一个不可证的公式。B为它的合取范式。B也不可证，因此在B的合取项中必有一个项C（即一个析取式），其中没有彼此否定的两个析取支。在C中对每个非否定的命题变项代以p，对于每个否定的命题变项代以 $\neg p$，我们便得到 $p \vee p \vee \ldots \vee p$，这与p等值。如果A为公理，则可推出B，从而推出C。因此，p可证。但p也可代以 $\neg p$。所以得到一个逻辑矛盾。这就证明了命题演算具有语法完全性。

（二）谓词演算的一致性和独立性

谓词演算的一致性首先由希尔伯特和阿克曼在1928年加以证明。他们把谓词变元和命题变元都当作算术变元，取值为0和1。对谓词变元的空位填以什么个体变元不予考虑，量词全都删去。∨当作乘法，$\neg 0$ 为 1，$\neg 1$ 为0。在这种算术解释之下，所有的公理都取值为0。如果从取值为0的公式根据变形规则推出一个公式，那么该公式也取值为0。但是，互相否定的两个公式不可

①参看希尔伯特和阿克曼：《数理逻辑基础》，莫始揆译，科学出版社1958年版，第38—40页。

能同时为0。由此可得，由公理所推出的公式，没有两个是互相否定的。

谓词演算公理系统的独立性，由希尔伯特和阿克曼在《理论逻辑基础》第二版(1938)中加以证明，这种证明方法是贝尔纳斯首先提出的并告诉了希尔伯特。希尔伯特和阿克曼在脚注中指出："本书所发表的便是按照贝尔纳斯的思想而作的"。①首先，证明公理(1)至(4)的独立性。方法是：将全称量词和存在量词删除，每一个谓词变元及其变目全都用命题变元代替。这样，公理(5)和(6)变为公式 $p\rightarrow p$，也就是 $\neg p\vee p$。对命题演算公理独立性的证明稍作修改，我们就可以证明，谓词演算的前四条公理之一不能从公理(5)和(6)的变形 $p\rightarrow p$ 以及其他三条公理推出。

公理5) $(\forall x)F(x)\rightarrow F(y)$ 的独立性证明如下。将 $(\forall x)A(x)$，$(\forall y)A(y)$ 等形状的公式都换为 $(\forall x)A(x)\vee p\vee\neg p$，$(\forall y)A(y)\vee p\vee\neg p$ 等。这样，凡是不用公理(5)能推出的每一个公式都仍然变或一个在谓词演算中可以推出的公式。这是因为在经过这种变换后，公理1)至4)及6)都不受影响。代入规则，分离规则，前件存在规则及改名规则对各公式之间的联系仍然有效。通过后件概括规则所得的公式 $A\rightarrow(\forall x)B(x)$ 变为 $A'\rightarrow(\forall x)B'(x)\vee p\vee\neg p$，而这是一个可证公式。但是，公理(5)却变为

$$(\forall x)F(x)\vee p\vee\neg p\rightarrow F(y),$$

显然这是推不出来的，因为由这个蕴涵式的前件的真可得 $F(y)$，再据代入规则可得 $\neg F(y)$，这就导致一个逻辑矛盾。

将公式 $(\exists x)A(x)$ 变换为 $(\exists x)A(x)\wedge p\wedge\neg p$ 就可证明公理(6)的独立性。

希尔伯特和阿克曼不但证明了各公理的独立性，而且也证明了变形规则的独立性。

用以上的类似方法可以证明后件概括规则和前件存在规则的

① 前引《数理逻辑基础》第86页。

独立性。将公式$(\forall x)A(x)$换成$(\forall x)A(x)\wedge p\wedge\neg p$，这样凡不用后件概括规则而能推出的公式都变成一个可推出的公式。但在谓词演算中可推出的公式$(\forall x)(F(x)\vee\neg F(x))$却变为一个推不出的公式$(\forall x)(F(x)\vee\neg F(x))\wedge p\wedge\neg p$。这就证明了后件概括规则的独立性。将$(\exists x)A(x)$换为$(\exists x)A(x)\vee p\vee\neg p$，就可证明前件存在规则的独立性，因为根据这个变换，$\neg(\exists x)(F(x)\wedge\neg F(x))$变为一个推不出的公式。

命题变元代入规则的独立性可如下得出，如果没有这条规则，则含有个体变元的可证公式只能是以下形式的公式：

$$(\forall x)A(x)\rightarrow A(y);\ A(y)\rightarrow(\exists x)A(x);$$

$(\forall x)A(x)\rightarrow(\forall x)A(x)$；$(\exists x)A(x)\rightarrow(\exists x)A(x)$；$(\exists z)((\forall x)A(x)\rightarrow A(z))$；$(\exists z)(A(z)\rightarrow(\exists x)A(x))$，

或者由这些公式用个体变元代入规则或约束变元改名规则而得出的公式。因为公理(5)和(6)具有这些形式，而通过其余的变形规则也永远只得到这一类的公式。因此，如果没有命题变元代入规则，那么我们就不能推出公式$(\forall x)F(x)\rightarrow(\exists x)F(x)$。

自由个体变元代入规则的独立性可如下证明。如果谓词变元某些空位处所填的个体变元是z，则把该空位(连同变元z)删除。例如把$F(x, z)$变成$F(x)$，$G(z)$变成G。在这种变换后，凡是未用到个体变元代入规则所作出的证明都仍然变成一个证明。公理不受这个变换的影响，因此，所有不用上述规则的可证公式仍然变为可证公式。但可证公式$(\forall x)F(x)\rightarrow F(z)$(使用了个体变元代入规则)却变换为$(\forall x)F(x)\rightarrow F$，这里第二个$F$是一个命题变元，这个公式是不可证的。

用同样的方法可以证明约束变元改名规则的独立性。删除量词$(\forall z)$和$(\exists z)$，以及约束变元z(连同z所填的空位)。经过这个变换，凡不用改名规则所推出的公式也变成一个可推出的公式。但是，使用改名规则的可证公式$(\forall z)F(z)\rightarrow F(x)$却变为一个推不出的公式$F\rightarrow F(x)$。

现在证明谓词变元代入规则的独立性。我们把凡是具有$(\forall x)A(x)$，$(\forall y)A(y)$等等形状的部分公式，只要它含有谓词变元G，便都换为$(\forall x)A(x)\vee p\vee\neg p$，$(\forall y)(a(y))\vee p\vee\neg p$等。经过这些变换，凡不用谓词变元代入规则而可推出的公式仍变为一个可推出的公式。但是，使用上述代入所推出的公式$(\forall x)G(x)\rightarrow G(y)$却变为$(\forall x)G(x)\vee p\vee\neg p\rightarrow G(y)$，前件含$p\vee\neg p$，因此前件是真的，由此推出$G(y)$，再代入可得$\neg G(y)$，从而得到一个矛盾。

分离规则的独立性可如下证明。如果没有这个规则，那就只能得到$\neg A\vee B$（即$A\rightarrow B$）形的公式。因为所有公理都是这种形状的，除分离规则外的各规则也都给出这样的公式。因此，若无分离规则便不能推出$p\vee\neg p$。

以上便是希尔伯特和阿克曼对谓词演算公理系统各公理和推理规则的独立性所给出的证明。

一阶谓词演算不具有象命题演算那样的语法完全性或较强意义的完全性，也就是说，对一阶谓词演算来说，把某一个以前推不出的公式加到公理去以后，得不到一个矛盾。例如，我们可以找到一个公式$(\exists x)F(x)\rightarrow(\forall x)F(x)$，按照上述证明一致性的算术解释，它取值为0，但它却不是可证公式。从直观上说，这个公式是说："如果有一个x使F(x)成立，则对于一切x，F(x)成立"，显然这不是普遍有效的。对这一点，可给出严格证明。

但是，一阶谓词演算在弱的意义上，即对证明所有普遍有效公式是充分的这个意义上，是完全的。这种完全性称为语义完全性。哥德尔在1930年发表的论文《逻辑的函项演算公理的完全性》中第一次证明了这个定理，我们将在第十四章第一节中加以论述。

第五节　非经典逻辑简述

由弗雷格奠定基础的一阶逻辑是二值外延逻辑，是以二值原

则和外延原则为基础的。这两个原则，弗雷格曾做过说明。二值原则是说一个命题只取“真”、“假”二值之一为值;外延原则是说,所指相同的词项和命题可以互相替换。现代逻辑文献把满足以上两个原则的二值外延逻辑称为经典逻辑，把不满足二值原则或不满足外延原则的逻辑称为非经典逻辑。弗雷格明确指出，关于“相信”、“知道”的语句不能应用外延原则。弗雷格的“所指”理论为非经典逻辑奠定了理论基础。

非经典逻辑的一个分支——模态逻辑，在古希腊和中世纪已有一些零星的结果。亚里士多德提出了模态命题逻辑的对当方阵，建立了模态三段论的推理系统。麦加拉一斯多阿学派也对必然性和可能性这些模态概念作过讨论。中世纪逻辑学家提出了模态逻辑的一些原理。这些成果为用数理逻辑方法研究模态逻辑提供了思想资料。

现代的模态逻辑的创始者是美国哲学家和逻辑学家路易斯(C. I. Lewis, 1883一1964)。他在1912年首先提出“严格蕴涵”的概念,以别于罗素的“实质蕴涵”。按照实质蕴涵,会出现某个命题的假蕴涵每一个命题和一个真命题，某个命题的真被每一个命题所蕴涵。这就是所谓实质蕴涵的“怪论”。路易斯认为，实质蕴涵这些怪论没有反映出联结词“如果…那么”的逻辑性质,提出“如果p那么q”应当定义为“p真而q假是不可能的”，这就是“严格蕴涵”,其中引入了“可能”这个模态概念。1914年,他建立了一个关于严格蕴涵的模态命题演算。1918年，路易斯出版了《符号逻辑概观》一书，①对1914年的系统作了改进。路易斯的成熟著作是他和兰福德(C. H. Lanford)合著的、于1932年出版的《符号逻辑》②。在这本书中，路易斯提出了5个著名的模态命题逻辑系统：S_1,S_2,S_3,S_4和S_5。

---

①Lewis, C. I. A Survey of Symbolic Logic. Berkeley, 1918 .
②Lewis, C.I. and Lanford, C. H. Symbolic Logic. New York, 1932

系统 S_1 初始符号是◇（可能），否定符号和合取符号。严格蕴涵 $p \prec q$ 定义为 $\neg\Diamond(p\wedge\neg q)$。$S_1$ 的公理有以下7条：

B1. $p\wedge q \prec q\wedge p$

B2. $p\wedge q \prec p$

B3. $p \prec p\wedge p$

B4. $(p\wedge q)\wedge r \prec p\wedge(q\wedge r)$

B5. $p \prec \neg(\neg p)$

B6. $[(p \prec q)\wedge(q \prec r)] \prec (p \prec r)$

B7. $[p\wedge(p \prec q)] \prec q$

运算规则有变元代人和严格等值表达式的替换规则，分离规则：

$$\frac{P \quad P \prec Q}{Q}$$

以及附加规则：

$$\frac{P \quad Q}{P\wedge Q}$$

$S_2 = S_1 + \Diamond(p\wedge q) \prec \Diamond p$。

$S_3 = S_1$（或 S_2）加 $(p \prec q) \prec (\neg\Diamond q \prec \neg\Diamond p)$。

$S_4 = S_1$ 加 $\neg\Diamond\neg p \prec \neg\Diamond\neg\neg\Diamond\neg p$（$\Box p \cdot \Box\Box p$）。p)。

$S_5 = S_1$ 加 $\Diamond p \prec \neg\Diamond\neg\Diamond p$（$\Diamond p \prec \Box\Diamond p$）。

在路易斯建立了模态命题逻辑的系统之后，不少逻辑家学沿着路易斯开创的道路前进，一方面对路易斯系统的性质进行研究，另一方面也创立了不同的模态命题逻辑系统。20世纪40年代，建立了模态谓词逻辑系统并开始进行语义学的研究。

在模态逻辑中，外延原则不成立。还有另一种类型的非经典逻辑——多值逻辑，其中二值原则不成立。1920年，卢卡西维茨提出了用三值逻辑系统去解决亚里士多德关于未来偶然事件的问题。他在后来陈述创立三值逻辑系统的思路时说：“我可以无矛盾地假定：我在明年的某个时刻，例如在12月21日中午，出现在华

沙；这在现在的时刻是不能肯定或否定地解决的。因此，我在所说的时间将在华沙，这是可能的但不是必然的。根据这个预先假定，‘我在明年12月21日中午出现在华沙’这句话在现时既不是真的，也不是假的。因为如果它现时是真的，那么我未来在华沙的出现就一定是必然的，而这与预先假定矛盾；如果它现时是假的，那么我未来在华沙的出现就一定是不可能的，而这也与预先假定矛盾。因此，所考虑的这句话在现时既不真也不假，必有与0（或假）和1（或真）不同的第三个值。我们可以用‘$\frac{1}{2}$’来表示这一点：它是‘可能的’,作为第三个值是与‘假,和‘真,并行不悖的’。①

卢卡西维茨在1920年的文章《论三值逻辑》中，②用1, 0, ＝和＜分别作为真，假，恒等和蕴涵的符号，他先列出二值逻辑的原则和定义如下：

1．值假的恒等原则、值真的恒等原则和值真假的非恒等原则：$(0=0)=1, (1=1)=1, (0=1)=(1=0)=0$。

II．蕴涵原则：$(0<0)=(0<1)=(1<1)=1, (1<0)=0$。

III．否定原则，加法和乘法原则：

$a'=(a<0)$（′表示否定），

$a+b=[(a<b)<b]$（＋表示析取）

$ab=(a'+b')'$（ab表示合取）。

在以上定义中，a和b仅取两个值之一，二值逻辑的规律都可将其中的变元换成0和1来检验，例如$(a=1)=a$是真的，换成$(0=1)=0$和$(1=1)=1$。

将以上原则和定义保留，变元a和b除取1和0之外，还取$\frac{1}{2}$为值，再加上以下原则即成三值逻辑：

I．恒等原则：$\left(0=\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}=0\right)=\left(1=\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}=1\right)$

①转引自《逻辑学的发展》第709页。

②载《哲学译丛》1983年第6期。

$=\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\right)=1$。

II. 蕴涵原则：

$$\left(0<\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}<1\right)=\left(\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\right)=1,\left(\frac{1}{2}<0\right)$$

$$=\left(1<\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}。$$

凡是三值逻辑的规律都是二值逻辑中的规律，但是有不少二值逻辑的规律却不是三值逻辑的规律。例如，三段论原则（$a<b)(b<c)<(a<c$），矛盾律 $aa'=0$，排中律 $a+a'=1$，等等在三值逻辑中只是"可能的"。比如，设

$$a=\frac{1}{2}, \text{则 } a'=\left(\frac{1}{2}<0\right)=\frac{1}{2}, a+a'=\left[\left(\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.<\frac{1}{2}\right]=\left(1<\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

因此

$$\left(\frac{1}{2}=1\right)=\frac{1}{2},$$

这就是说，排中律在三值逻辑中不是永真公式。有些二值逻辑的规律在三值逻辑中为假，例如（$a=a'$）$=0$，因为当

$$a=\frac{1}{2}$$

时，$a=a'$ 为真。

后来，卢卡西维茨还从三值逻辑推广得到多值逻辑的概念。

1921年，波斯特在《初等命题的一般理论导论》中，①在引进命题逻辑的二值真值表的同时，提出了 m 值真值系统，在其中每一变元不仅能取二值之一，而且能取 m 个不同的值 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 中

①载F. G. pp. 264—283。

的任何一个。这个m值逻辑系统的初始联结词是否定（记为$\sim_m$）和析取（记为$\vee_m$）。$\sim_m$的真值表如下：

p	$\sim_m p$
t_1	t_2
t_2	t_3
⋮	⋮
t_m	t_1

由上表可见，算子$\sim_m$按循环的次序来排列真值。$\vee_m$的真值表如下：

p	q	$p\vee_m q$	
t_1	t_1	t_1	
…	…	…	
t_{i_1}	t_{j_1}	t_{i_1}	$i_1\leqslant j_1$
…	…	…	
t_{i_2}	t_{j_2}	t_{j_2}	$i_2\geqslant j_2$
…	…	…	
t_m	t_m	t_m	

$p\vee_m q$是$p\vee q$的推广，取两个值中较高的一个为值（这里较高的值具有较小的下标）。

波斯特用以下规定对m值真值系统在日常逻辑中作了解释：①

1. m值系统的初等命题被解释为日常逻辑中（m-1）个初等命题的有序集合$P=(p_1, p_2, \cdots, p_{m-1})$，使得如果一个命题是真的，那么所有在序列中跟随在它之后的也是真的。

2. 如果恰好有$r-1$个p是假的，那么P取值为t_r。

3. 如果$P=(p_1, p_2, \cdots, p_{m-1})$，$Q=(q_1, q_2, \cdots, q_{m-1})$，那么$P\vee_m Q$定义为$(p_1\vee q_1, p_2\vee q_2, \cdots, p_{m-1}\vee q_{m-1})$。

4. 如果$p=(p_1, p_2, \cdots, p_{m-1})$，那么$\sim_m p$定义为$(\sim(p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_{m-1}), \sim(p_1\vee\cdots\vee p_{m-1})\vee(p_1\cdot p_2) p\cdots, \sim(p_1\vee$

① 见F. G. p. 283。

$\cdots \vee \quad p_{m-1}) \vee (p,_{m-2} \quad \dot{p} \quad '_{m-1}))$。

非经典逻辑是在二值外延逻辑的基础上发展起来的，现已建立了许多分支，可谓硕果累累，这需要整本专著加以论述，这已超出本书的范围，我们不再赘述。

第十章　从素朴集合论到公理集合论

第一节　无穷集合的怪论

无穷集合同有穷集合有本质区别。有穷集合不能与其真子集（即不等于这个集合自身的子集）一一对应，而无穷集合却能与真子集一一对应。这就是说，在无穷集合的情况下，不是"全体大于部分"，而是"全体等于部分"。发现并解决这一怪论在数学和数学发展史上具有重要意义，成为一门崭新的学科——集合论的出发点。

中世纪已有一些逻辑学家提出无穷集合的怪论。但在数学和数理逻辑发展史上第一次全面地详尽地论述这个怪论的文献是伟大科学家伽利略（G. Galileo，1564—1642）于1636年出版的《关于新科学的对话》。对话的参与者共三人，其中，萨格列多（Sagredo）代表实用主义者，辛普利契奥（Simplicio）受过经院方法的训练，而萨尔维阿蒂（Salviati）是伽利略本人。这段著名的对话如下：①

萨尔维阿蒂：当我们试图用有限的心智来讨论无限时，所发生的困难之一，就是假定它有我们给予有限的和有穷的那些性质；我以为这样作是错误的，因为对于无限的数量，我们不能说两个中孰大孰小或相等。要证实这一点，我心中已有了一个论证，为了简明起见，我将用问答的形式和辛普利契奥讨论，困难是由他提出来的。

①转引自丹齐克著：《数，科学的语言》，苏仲湘译，商务印书馆1985年版，第174—175页。

我假定你们部知道了什么数是平方数，什么数不是。

辛普利契奥：我很知道平方数就是由一个数自己相乘而得出的数；所以，由2、3等各自自乘而得出的4、9等就是平方数。

萨尔维阿蒂：对了。你们也知道，就因为这种乘积叫作平方数，所以其因数就叫作边或根了；反过来，若乘积没有相等的因数，它们就不会是平方数了。因此，假如我说所有平方数、非平方数总括起来要比上举的平方数为多，我说的乃是真理，对吗？

辛普利契奥：那是一定的。

萨尔维阿蒂：如果我问有多少平方数？人家就可以确确实实的回答说，和相对应的根的数目是一样多的，因为每一个平方数都有它自己的根，而且每个根也有其自己的平方数，而且没有一个平方数有一个以上之根，也没有一个根有一个以上之平方数。

辛普利契奥：当然是这样的了。

萨尔维阿蒂：但是如果我问有多少个根呢？你不能否认它的数目和数一样多，因为每一个数都是某平方数之根。承认了这个之后，我们必须说，有多少数就有多少平方数，因为有多少根就有多少平方数，一切的数都是根。然而，我们先头说过，数是比平方数多的，因为数的大部分都不是平方数。不但如此，平方数和数的比例是越到大数则较小的。例如到一百，我们有十个平方数，即全数的十分之一 到一万,只有一百分之一是平方数 到一百万,只有千分之一；然而从另一方面来看，在无限数中—— 如果我们能够想像这样一个东西的话—— 就只好承认平方数跟全部总括起来的数是同样多的了。

萨格列多：那么在这种情形之下，我们只能得出甚么结论呢？

萨尔维阿蒂：就我所知道的，我们只能说平方数是无限的，其根数也是无限的；我们不能说平方数比一切的数少，也不能说后者比前者多 説到底‛; 等于 〃、大于 ’和 小于 ’诸性质不能用于无限，而只能用于有限的数量。

于是，当辛普利契奥拿出几段长短不同的线，并且问怎么能够

说长的不比短的有更多的点时，我就告诉他说，一段线不比另一段线有更多的，或较少的，或同样多的点，而是每一段线都含有无限个点。

这就是伽利略关于无穷集合的怪论。伽利略已经发现了两种奇怪的现象：

1 在正整数集合 $S_1=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ 与正整数的平方数集合 $S_2=\{1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots\}$ 中，一方面，由于 S_1 的大部分都不是平方数，即 S_2 是 S_1 的真子集，因而 S_1 的元素比 S_2 的元素多；另一方面，由于每一个数都是某平方数之根，也就是说，每一个数都和一个唯一的平方数对应（把 S_1 中的 n 对应于 S_2 中的 n^2），因而 S_1 的元素与 S_2 的元素是同样多的。

2．长线段上的点有无限多个，短线段上的点也有无限多个，因而前者不比后者有更多的点。这实际是说，长线段上的实数与短线段上的实数一样多。

伽利略碰到了正整数集合和实数集合这两种集合的本性，即“部分等于全体”，但是他却感到困惑，避开了这个本性，宣布说：“大于、等于、小于诸性质不能用于无限，而只能用于有限数量”。

伽利略的怪论在当时并未产生什么影响。在他之后二百年，关于无穷集合的研究没有什么进展。莱布尼茨认为，“部分等于全体”是自相矛盾的，他用‘所有自然数的总数与偶数的自然数的数目相同”这个性质证明无穷数是不可能的。1851年，捷克逻辑学家鲍尔查诺 B. Bolzano, 1781—1848)生前写的德文小册子《关于无穷的怪论》出版。鲍尔查诺提出了“实无穷”的概念，看到了无穷集合的本性——“部分等于全体”,特别是提出了集合的势(’即基数）的概念。但总的说来，鲍尔查诺的进展不大，也没有引起人们的注意。

集合论的创始者是德国数学家和逻辑学家康托尔，他在伽利略的后退之处大踏步地前进了，下一节我们介绍康托尔的集合论。

第二节　康托尔的集合论

康托尔（G. Cantor, 1845—1918）生于俄国圣彼得堡（前苏联列宁格勒），1856年随父母移居德国。他在中学时期就对数学感兴趣，渴望成为一名数学家。1862年，他到苏黎世上大学，1863年转入柏林大学，在柏林大学学习期间受到著名数学家魏尔斯特拉斯的影响。1867年在柏林大学的博士论文论述了数论问题。1869年康托尔取得在哈勒大学任教的资格，1872年任副教授，1879年提为教授。从1884年起，他患了精神病，不时发作，常住院治疗。其根本原因有两个：1．以他的老师克朗尼克（L. Kronecher, 1823—1891）为首的一些数学家根本否定集合论，对康托尔进行批评和攻击。克朗尼克是一个构造论者，他认为整数是算术的基础，因而借有限多个整数而进行的构造过程是判别数学存在性的唯一标准，他也不承认无理数。克朗尼克在当时是柏林数学界的重要人物，他的观点和对集合论的攻击，不但对集合论的传播和发展起了严重的阻碍作用，而且损害了康托尔的身体。康托尔希望能到柏林大学任教，但克朗尼克坚决反对，致使康托尔的希望化为泡影。2. 在19世纪80年代初期，康托尔为解决连续统问题用脑过度。康托尔在健康恶化的情况下，还做了不少工作，他在1890年创立德国数学家联合会，任第一任主席。他还努力筹备召开国际数学家代表大会，第一届大会于1897年在苏黎世召开，康托尔得到了巨大成功。从1897年以后，康托尔的集合论得到广泛承认。但从1913年起，康托尔的身体迅速恶化，于1918年在哈勒逝世。

康托尔的主要论文有《论一切实代数数的一个性质》(1874)，1879—1884年发表的《论无穷的线性点集》的6篇论文。1932年，《康托尔全集》出版。

一、康托尔的指导思想——实无穷的理论

在康托尔创立集合论之前的一段相当长的时期内，潜无穷的思想在数学界占统治地位。潜无穷论者坚决否认无穷是完成的、固定的实体，认为无穷是潜在的，就发展说是无穷的。我们可以引证著名数学家高斯（Gauss，1777—1855）在1831年给数学家舒马赫（Schumacher）的信中一段话："至于你的证明，我不得不极力反对你把无限当作一种完成的东西来使用，因为这在数学上是决不能承认的。无限只不过是言语上的一个比喻；是一句陈述语的简略形式，就是说，有极限存在使得某些比例数能够任意地接近它，而其它量则可能增长到超越一切界限。……只要有限的人不误把无限当作某种固定的东西，只要他不凭借心灵中后天的习惯而把无限看作某种有限制的东西，那末就不会出现什么矛盾的。"①高斯的这段话代表了在集合论创立之前数学家们的传统观点。

要创立集合论这一新的数学分支，就必须首先与这种传统决裂。康托尔提出了实无穷的观点，给了当时的统治思想以致命的打击。他在1883年的一篇论文中，把实无穷当作确定的数学实体来处理。实无穷论者认为，无穷是一个实际存在的、完成了的整体，是可以认识的。康托尔说得好："我们传统上把无限看作有限制地增加或是与之密切关联的一个收敛序列的形式，这是十七世纪所取得的。与此相反，我把无限理解为具有某种完成了东西的确定形式，是某种不但能有数学表示而且可用数来定义的东西。这种无限的概念是和我所珍视的传统相违背的，和我自己的愿望更相违背，我是被迫接受这种观点的。可是多年的思考和尝试，指明这种结论是逻辑上的必然，由于这个原故，我自信，没有什么持之有据的反对意见是我所无法对付的。"②

---

①转引自《数，科学的语言》第176页。

②同上。

1885年，康托尔在给埃斯特姆（G. Enestr om）的信中指出，一切关于“实无穷不可能”的证明都是错误的，他说：“这些证明一开始就期望那些数要具有有穷数的一切性质，或者甚至于把有穷数的性质强加于无穷。可是相反，这些无穷数，如果它们能够以任何形式被理解的话，倒是由于它们和有穷数的对应，它们必须具有完全新的数量特征，这些性质完全依赖于事物的本性，……而并非来自我们的主观任意性或我们的偏见。”①

康托尔关于实无穷的理论具有朴素的唯物论和辩证法的精神。康托尔正是在实无穷的理论指引下，批判了传统的观念，把无穷集合看成是实际存在的、完成的数学实体，与有穷集合具有不同的本性，从而创建了一门崭新的学科——集合论，在数学和数理逻辑发展史上引起了革命性的变革。

康托尔所创立的集合论称为古典集合论或素朴集合论。这种集合论是把抽象的集合看成常识思维的对象，用直观的逻辑进行处理，没有采用公理化和形式化的方法。康托尔把集合描述为“我们的直观或我们的思维中确定的并可区分的对象所概括成的一个总体”。这就是说，一个集合具有两个重要特征，一是集合中的元素是确定的，二是集合的元素之间是可区分的。康托尔对集合的规定成为素朴集合论中两条重要原则——外延原则和概括原则——的基础。外延原则是说，一个集合由它的元素唯一地确定；概括原则是说，每一性质（或谓词）产生一个集合。由以下一章我们可以看到，如果对概括原则不加限制，就要产生悖论。

二、可数集和不可数集

康托尔是从研究“函数展开为三角级数的唯一性”开始研究无穷集合的。他在1870年、1871年和1872年的三篇论文中取得了重要结果。他在1870年指出，如果两个三角级数对任一x收敛并

① 转引自王宪钧着《数理逻辑引论》，北京大学出版社1982年版，第279页。

且其和相等，则它们的系数相同，肯定了函数展开为三角级数的唯一性。他在1871年将此结果推广到存在着有穷个例外点，1872年又推广到存在着无穷个例外点。由于研究这种不影响唯一性的无穷例外点集的需要，康托尔引入了直线上的点集概念，在数学史上第一次探讨了实数点集。1873年11月，康托尔在给戴德金的信中提出，有理数集合是可数的，也就是说，可与正整数集合一一对应；他这时猜想实数集合不能与正整数集有一一对应。1873年12月，康托尔告诉戴德金，说他已经证明实数集合是不可数的。1874年，康托尔第一篇关于集合论的论文《论一切实代数数的一个性质》发表。这篇论文证明了存在两种不等价的无穷集合：可数集与不可数集。这篇论文的发表标志着集合论正式诞生。

康托尔第一次科学地应用了"一一对应"的概念来把握无穷集合的本质。如果一个集合能与自己的真子集一一对应，那么它就是无穷集合。康托尔轻而易举地解决了伽利略的悖论。在此基础上,他又前进了一大步。他引进了"可数集"的概念,所谓可数集就是能与正整数一一对应的集合。康托尔认为，这是最小的无穷集合。康托尔证明了以下几点：

1．有理数集是可数的；

2．一切代数数（即作为一切代数方程式的解的所有数）的集合也是可数的；

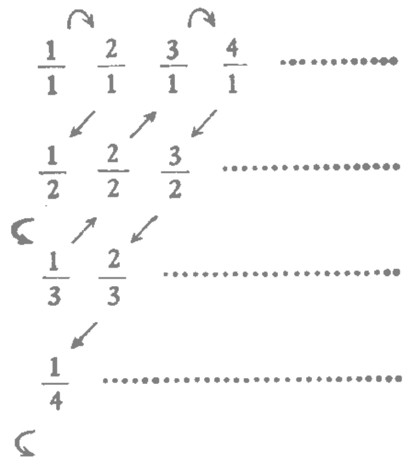
3．实数集不可数；

4. 由2和3可以推出，必定存在着超越无理数，它们是不可数的。康托尔在这里使用的是一种非构造性的存在证明。

现在让我们来分析一下康托尔对前三个结论所做的具有伟大历史意义的证明：

1．关于有理数集可数性的证明。康托尔在1874年给出了一个证明，1895年又给出了一个现在广为使用的证明。现在我们简述1995年的证明，康托尔证明的实际上是正有理数集，但其基本方法可推广到整个有理数集。

正有理数可按照以下方式排列：



在每一个小方块中，对角线上的有理数的分子之和同分母之和是相等的。例如在第一个小方块中，$\frac{1}{1}$和$\frac{2}{2}$,同$\frac{2}{1}$和$\frac{1}{2}$,其分子之和等于分母之和。我们从$\frac{1}{1}$开始，按箭头方向把数$_1$对应于$\frac{1}{1}$，数$_2$对应于$\frac{2}{1}$，数$_3$对应于$\frac{1}{2}$，数$_4$对应于$\frac{1}{3}$，数$_5$对应于$\frac{2}{2}$，如此等等。按这种对应方式，在某一阶段上每一有理数将被达到并对应于一个正整数。在以上排列中，有的有理数重复出现，这是无妨的。由以上的对应，我们可见，有理数集（其中有的有理数出现多次）同正整数是一一对应的。如果去掉重复，有理数集仍是无穷集合，并且必须是可数的，因为这是最小的无穷集合。

从表面上看，正整数集是有理数集的真子集，有理数集比正整数集要大得多,但实际上,它们是一一对应的,也就是说,一个无穷集合的真子集可以等于这个无穷集合。

康托尔用"一一对应"的概念解决了伽利略的"部分等于全体"的怪论，揭示了无穷集合的本质以及无穷与有穷的本质差别。康托尔的成果是人们对无穷集合认识道路上的第一块里程碑。

恩格斯说；"无限性是一个矛盾，而且充满种种矛盾。无限纯

粹是由有限组成的，这已经是矛盾,可是事情就是这样;①无穷集合与其真子集相等，这是一个辩证的矛盾。康托尔的理论从数学上充实、丰富了马克思主义关于无限的观点。

2. 关于代数数可数的证明。康托尔在1874年给出如下的证明：

设一般的代数方程为：

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_n = 0 \quad (a_i \text{ 是整数})$$

对n次的任一代数方程，令它对应于以下规定的数N：

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|,$$

其中a_i是系数。由此可见，N是一个整数。对每一N，只有有穷数的代数方程与之对应，因此也只有有穷数的代数数与之对应。当$N=1$，所对应的代数数为从1到n_1；当$N=2$，从n_1+1到n_2，如此等等。因为每一代数数都可被达到，并且只对应于一个整数,所以,代数数的集合是可数的。

3. 关于实数集不可数的证明。康托尔在1874年和1890年分别给出了证明，后一证明较简单，简介如下：

假定在0和1之间的实数是可数的。我们把每一实数写成小数,并规定数$\frac{1}{2}$写成0.499…,如此等等。如果这些实数是可数的，我们可把每一实数对应于一个整数n：

$$1 \longleftrightarrow 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$
$$2 \longleftrightarrow 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$
$$3 \longleftrightarrow 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$$
$$\cdots\cdots$$

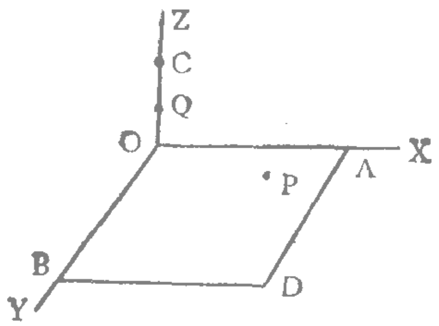
现定义0和1之间的一个实数$b=0.b_1b_2b_3\cdots$，如果$a_{kk}=1$则$b_k=9$，如果$a_{kk}\neq 1$则$b_k=1$。这个实数与以上对应中的任何实数都不相同。可是，以上的对应应该包括0和1之间的所有实数。因此，产生矛盾。这就证明了0和1之间的实数是不可

①《马克思恩格斯选集》，第3卷，第90页。

数的。

在康托尔的证明中，第一次使用了名扬数学史的对角线方法。在以上所构造的实数b即$0.b_1b_2b_3$…中，它在第一个小数位置上与a_{11}不同，在第二个小数位置上与a_{22}不同，在第3个小数位置上与a_{33}不同，等等。a_{11}，a_{22}，a_{33}…是对角线上的数。由此可见，康托尔的对角线方法十分绝妙，它是研究无穷集合的重要工具，具有非常重要的方法论意义。

实数集也就是一条线段上的点集（线性连续统），这一集合是否与n维空间的点集一一对应呢？康托尔在1874年开始研究这个问题，他当时认为这两种集合之间不可能有一一对应。康托尔的想法似乎是符合直观的，因为人们的直观总是认为，在三维空间，在无限的宇宙中，当然比一条线段有更多的点。不过，单靠直观并不能得到真理。康托尔经过三年的潜心研究，于1877年得出结果：线性连续统和n维空间有一一对应，他在写给戴德金的信中说：“我见到了，但我不相信。”康托尔在1878年的论文中宣布了他的发现。他证明的是长度为1的线段OC与边长为1的正方形ADBO之间能够一一对应。



设在正方形ADBO中有一点P，它可用坐标x，y标出。这两个数都是实数，而且不大于1，所以都可写成小数。这两个小数都可表示为无穷小数，因为若是有穷小数，例如0.8，可变为无穷小数0.7999……。设x, y可写成以下形式：

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots\cdots$$
$$y=0.b_1b_2b_3\cdots\cdots$$

由x和 y 作出第三个数z：

$$z=0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots\cdots$$

这个小数也是一个实数，可在线段OC上用一点Q标出。因此，对于正方形内的每一个点（x, y）就有线段OC上唯一的一个点z与之对应。反之亦然。

康托尔的结果同我们的直观十分矛盾，以致当时有些数学家认为它破坏了维度的概念，违背了常识，是唯心主义的虚构。但是，康托尔应用了“一一对应”这个强有力的工具，揭示了线性连续统与n维空间具有同样的无穷集合的本质，推进了对维度概念的研究。1879年，数学家吕洛特（J. Luroth）证明了线性连续统同单位正方形（即平面）的一一对应不是连续的，这就是说，相邻的z点不必然同相邻的（x, y）点对应，相邻的（x, y）点也不必然同相邻的z点对应。后来，著名的直觉主义代表人物布劳维尔（Brouwer）在20世纪初证明了维数的拓扑不变性，这一重要结果表明，不存在m维空间和n维空间的连续的一一对应（$m\neq n$）。

三、超穷基数和超穷序数

康托尔在1878年提出了等价和势（即基数）的概念。两个集合是等势的（康托尔记为$M\sim N$）当且仅当在它们之间有一一对应。康托尔在这里用“一一对应”的概念定义了“等势”的概念。显然，等势是一种等价关系（即自返的，对称的和传递的关系）。与一个给定的集合M等势的一切集合有一共同性质，这一共同性质就是M的基数，康托尔把它记为$\bar{\bar{M}}$。根据康托尔的说法，一个给定集合M的势或基数是一般概念，是借助于我们的积极的思维能力，当我们从一个集合M的各种元素m的性质进行抽象并从它们所给定的次序进行抽象的时候，从集合M所得到的结果。在$\bar{\bar{M}}$中的两道水平短线表示双重抽象。根据康托尔的定义，$M\sim N$与$\bar{\bar{M}}=\bar{\bar{N}}$是等价的。

如果M是有穷的，那么$\bar{\bar{M}}$就是一些自然数。如果M是无穷的，

那么它的基数就不是自然数了。康托尔用 $\aleph_0$ 表示自然数或正整数集合的基数，与自然数集等势的一切集合，其基数都是 $\aleph_0$，这就是说,凡具有基数 $\aleph_0$ 的无穷集合是可数的。康托尔认为，无穷集合的基数可以比较，比较的方法就是通过“一一对应”。如果一个集合M与另一集合N的子集一一对应，但与N本身不一一对应，那么 $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ 康托尔所提出的基数可比性的思想实际上是选择公理的一种等价形式。①由此可得，实数集合(连续统)的基数c(连续统continuum的第一个字母)大于自然数集合的基数，即c > $\aleph_0$。

康托尔集合论的最主要结果是在1879年以后取得的。首先，我们介绍著名的康托尔定理”。这一定理是说,给定一个集合,它的幂集(即一切子集合所构成的集合)的基数大于原集合的基数。设给定的集合为M，其幂集记为 uM。显然，M与幂集中的一部分即M的所有单元集的集合是一一对应的。但M与 uM不能一一对应。康托尔用反证法加以证明。假定它们一一对应。 UM 的元素是M的一切子集，因此我们可以问：M的任一个元素是不是它的对应者的一个元素？现考虑一个集合，其元素仅仅是M的那些元素：这些元素不是其对应者(uM中的元素)的元素。这个集合本身一定是 UM中的一个元素，设为a，据假设，它必与M的一个元素β相对应。现在我们问：β是不是a的元素？如果我们说“是”，那么据定义，a只包含那些M的元素；这些元素不是其对应者的元素,即β不是a的元素。如果我们说β不是a的元素，那么据定义，不包含在a中的M的任一元素一定是其对应者的一个元素,即β是a的元素。总之,导致矛盾。因此,我们必须否定原来M与uM一一对应的假定。这样，我们就得到： $\overline{\overline{uM}} > \overline{\overline{M}}$。康托尔对这一定理的证明技巧类似于实数集不可数的证明，证明的关键在于如果承认M与 uM 的一一对应关系，那么就要承认这种对

①见H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice, Amsterdam 1963.

应关系所不能包括的元素。的定义。集合a类似于实数不可数证明中所构造出来的对角小数。因此，我们可以把康托尔定理的证明看成是对角线方法的一种变形。若M为有穷集合，例如M={0，1}，则 μM的元素恰好有2^2个,即φ空集),{0}, {1} 和 {0，1}，一般说来，M有，个元素，则 uM的元素为2^n个。推广到无穷集合，若M的超穷基数为a，则 μM的基数为2^a。由此可得2^a＞a，这里a为任一无穷集合的基数。这是康托尔定理的直接系定理。

根据康托尔定理，给定一个集合，可以通过幂集来构成一个更大的集合；给定一个基数，可以得到一个更大的基数。这就是说，我们可以构造以下一个比一个大的集合序列：

$$M, uM, uuM, \cdots$$

也可以构造以下相应的一个比一个大的基数序列：

$$\alpha, 2^{\alpha}, 2^{2^{\alpha}}, \cdots$$

因此，从康托尔定理可得以下结论：没有最大的集合，也没有最大的基数。

基数的概念是双重抽象的结果。如果我们只从集合的元素的性质进行抽象,而保留次序的概念,那么就可得到 序数”。根据康托尔的说法，一个集合是简单有序的，当且仅当有一个不自返的、传递的关系≺使得对该集合的任意两个元素a和b，或a ≺ b或b≺a。两个简单有序的集合(序集) M和N是相似的，当且仅当在它们之间存在一一对应并且在对应时保持一切次序关系，这就是说，如果M的元素m对应于N的元素，n_1，m_2 对应于n_2，并且$m_1 \prec m_2$，那么 $n_1 \prec n_2$。两个序集相似记为$M \simeq N$。给定一个序集M，凡与M相似的一切序集有一个共同性质，这个共同性质称为M的序型 $\overline{M}$。一个序集称为良序的，当且仅当它的每一不空子集有首元素(所谓首元素或首元就是在给定的次序中位于其他一切元素之前的元素）。任一良序集的序型称为一个序数。康托尔在引进了良序集和序数的概念之后指出，对于有穷集合,不论其中

元素的次序如何排列，所得的序数相同，也就是说有唯一的序数。上面说过，一个有穷集合的基数是自然数1, 2, . . . , 因此在有穷集合的情况下，我们可把1, 2, …看成是基数，也可看成是序数。康托尔强调说，对于无穷集合，情况迥异，从一个无穷集可以形成无穷多个不同的良序集，因而有不同的序数。

按自然的次序排列的正整数集{1, 2, …}的序数是最小的超穷序数，康托尔把它记为ω。按逐渐减小的次序排列的正整数集{ …,4, 3, 2, 1}的序数记为 $^*\omega$。正整数、负整数和零的集合按通常次序排列的序数为 $^*\omega+\omega$。按康托尔的定义，两个序数的和是按规定次序的第一个序集的序数加第二个序集的序数。例如正整数后有前5个整数的集合{1, 2, 3, …, 1, 2, 3, 4, 5}，它有序数 $\omega+5$。类似地，可定义乘法。

康托尔把序数加以分层，引进了"数类"这一重要概念。第一数类是一切有穷序数，用Z_1 表示。第二数类是以下的超穷序数：

超穷序数	相应的良序集
ω	{1，2，3，…}
$\omega+1$	{1，2，3，…，1}
$\omega+2$	{1, 2，3，…，1, 2}
……	
$\omega+\omega$（即 $\omega\cdot 2$）①	{1，3，5，…, 2, 4，6…}
$\omega\cdot 2+1$	{1，3，5，…, 2，4，6，…，1}
$\omega\cdot 3$	{1，4，7，…, 2, 5，8，…，3，6，9，…}
$\omega\cdot 3+1$	{1，4，7，…, 2，5，8，…，3，6，9，…，1}
……	

① 注意：$2\omega=\omega\neq\omega 2$，同样 $5+\omega=\omega\neq\omega+5$。交换律不成立。

ω^2（即 $\omega\cdot\omega$）	$\{1,2,3,\cdots,2,4,6,\cdots,3,6,9,\cdots,k,2k,3k,\cdots\}$
ω^3	
ω^ω	

与第二数类中的超穷序数相应的良序集虽然不同，但它们有共同的基数 $\aleph_0$。第二数类用 Z_2 表示，在第二数类中超穷序数的集合有一个超穷基数，这个集合是不可数的，康托尔用 $\aleph_1$ 表示这个新的超穷基数。$\aleph_1$ 是 $\aleph_0$ 的后继基数。然后我们把基数为 $\aleph_1$ 的一切良序集的序数按以下次序排列：

$$\Omega,\ \Omega+1,\ \Omega+2,\ \cdots,\ \Omega+\Omega,\ \cdots$$

这些序数构成的集合就是第三数类，用 Z_3 表示，其基数为 $\aleph_2$。仿此，可构成第四数类，第五数类，等等。因此，这种序数和基数的分层可以无穷地继续下去。

康托尔在构造这种无限分层的过程中提出了良序定理，这一定理是说，任一集合都可良序。康托尔认为这一定理对于集合论是根本性的思维规律，他在上述过程中应用了这一定理，在构造数类时只考虑良序集。他提出的任意两个集合或任意两个基数可比较大小的原则可由良序定理导出。康托尔本来打算证明良序定理，但后来他并未做这一工作。德国逻辑学家、公理集合论的奠基人策梅罗（E. Zermelo, 1871 — 1953）在 1904 年和 1908 年两次证明了良序定理，在证明中使用了选择公理。现代的研究表明，康托尔所提出的基数可比性、良序定理和策梅罗提出的选择公理三者是等价的.①

四、连续统假设

根据康托尔的数类分层，我们有以下的超穷基数序列：

①同上书Equivalents of the Axiom of Choics。

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots$$

根据康托尔定理，我们以下序列：

$$\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \cdots$$

我们已经知道 $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ 而 $\aleph_1$ 是大于 $\aleph_0$ 的下一个超穷基数，因此，$2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$。康托尔猜想：

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1。$$

康托尔证明了 $2^{\aleph_0}$ 等于连续统的基数C。这就是说，$2^{\aleph_0}$ 是否等于 $\aleph_1$ 的问题就是连续统（实数集）的基数是否就是紧接 $\aleph_0$ 的最小超穷基数的问题，即在 $\aleph_0$ 和c之间是否还有一个超穷基数的问题。康托尔认为在 $\aleph_0$ 和c之间没有其他基数，或者说，c就是紧接 $\aleph_0$ 的下一个超穷基数。在数理逻辑发展史上，康托尔的这一猜想称为"连续统假设"。

康托尔在1878年首先提出这一假设，1883年他表示希望能严格证明这一问题，在1884年他说，连续统假设是可证的。但是，他并未能解决连续统假设。

1900年，希尔伯特在巴黎第二届国际数学家大会上作了《数学问题》的著名讲演，对康托尔的连续统假设给予了高度评价，并把它列为23个未解决问题的第一个。1925年，希尔伯特在《论无穷》一文中曾提出证明连续统假设的一个大纲，但后来发现他的大纲有错误。迄今为止，关于连续统假设所取的两个重大结果是：

1. 哥德尔在1938年证明了连续统假设与集合论的公理是一致的，即如果集合论的公理是一致的，则推不出连续统假设的否定；

2. 科恩（P. J. Cohen）在1963年证明了连续统假设与集合论公理的独立性，即如果集合论的公理是一致的，则推不出连续统假设。

由此可得，连续统假设对现有的集合论公理系统是不可判定的。

最后，我们要指出，康托尔关于数类的无限分层即超穷基数的可比性思想具有重要的哲学意义。最先提出无限可以比较大小的人是伟大的哲学家黑格尔,他在1812年的《《 逻辑学》一书中说‘:人们还说过：无限是什么，并不能以较大或较小来比较，所以按照无限的行列或品级，并不能够发生有限和无限的比率，像出现在数学科学中的无限差分的区别那样。以上所说的非难，是以如下的观念为基础，即这里所谈的是定量，它们是作为定量而被比较的；假如那些规定不再是定量，那末，它们彼此间也就不再有比率了。但是，那个仅仅在比率中的东西，倒不如说并非定量；定量是一个这样的规定，即它在比率之外，有一个完全漠不相关的实有，它与一个他物的区别应该是漠不相关的；与此相反，质的东西恰恰只是在它与一个他物相区别那样的东西。因此，那些无限的大小不仅是可以比较的，而且只有作为比较或比率的环节。”①康托尔在集合论中不谋而合地提出了无限可以比较大小的思想，可谓英雄所见略同。我认为，马克思主义哲学应当总结黑格尔和康托尔的思想，应明确提出这样一条原理：无限并不是单一的，它由于能比较大小因而具有无限的层次。

第三节　集合论悖论的出现——第三次数学危机

康托尔创立的集合论是数学和数理逻辑发展史上的惊天动地的伟业，开辟了崭新的数学领域，为数学奠定了初步基础。但是，康托尔的集合论毕竟是素朴的、直观的，它本身还存在一些不严格、不精确的地方，正是这些不严格之处导致了‘ 悖论”。所谓悖论是指其中有一命题，由它的肯定可以推出它的否定，而由它的否定又可以推出它的肯定。用公式表示就是：

$$p \to \neg p,$$

黑格尔著《 逻辑学》(上卷），杨一之译，商务印书馆1991年版第276页。

$$\neg p \rightarrow p,$$

由此可得：

$$p \longleftrightarrow \neg p。$$

简单说来，悖论就是一种逻辑矛盾。

最古老的悖论是公元前6世纪希腊哲学家发现的“说谎者悖论”。中世纪逻辑学家也发现了一批“说谎者悖论”的变形。这些都是语义悖论，与认识和语言有关。我们在第一编曾经讲过。

集合论悖论涉及集合、类、关系、数等等一类逻辑和数学的概念，它们是出现于逻辑系统或数学系统之中的悖论。下面我们来陈述一些主要的集合论悖论。

一、布拉里－福蒂悖论

这一悖论是关于最大序数的悖论。1895年，康托尔已发现了这个悖论，并且在1896年告诉了希尔伯特。但是，首先正式发表这一悖论的是意大利数学家布拉里－福蒂（Burali-Forti），他于1897年3月28日在巴拉摩数学会上宣读了一篇论文《关于超穷数的一个问题》，发表了最大序数的悖论。①他论证如下：

1. 每一良序集皆有一序数。根据康托尔集合论，序数是可以比较大小的。

2. 把小于并且包括某一已知序数β的一切序数排成一个良序集$\{0, 1, 2, \ldots, \beta\}$，此良序集也有一序数，应为$\beta+1$。

3. 设由所有序数组成一个良序集W，其序数为Ω。这样，Ω也应包括在所有序数的良序集W之中，并且是最大序数。

4. 由以上的2可得：包括Ω的所有序数的良序集，其序数应为Ω+1，它比Ω大。但据3，Ω+1应小于或等于Ω。由此，产生了逻辑矛盾。

布拉里－福蒂对最大序数悖论的描述由于误解了康托尔的良

---

① 见 F. G. pp. 104-11. 2。

序集概念而变得模糊不清了，但这种误解是容易纠正的，并没有妨碍这个悖论完全有效地保留下来了。

1899年7月28日，康托尔在给戴德金的信中，重新考察了最大序数的悖论，康德尔的陈述同布拉里－福蒂的陈述是类似的。①康托尔根据这一个悖论提出了一种解决办法，认为由所有序数组成的多数体是良序的，但不是一集合。康托尔把多数体分为两种：一种是不一致的多数体或绝对无穷的多数体，假定了所有它的元素的总体就导致矛盾，因此我们不能把这种多数体看成一种单一体或"一个已完成了的东西"，例如"每一可思维的东西的总体"就是这样的多数体；另一种是一致的多数体即集合，这种多数体的元素的总体可以无矛盾地看成是"结合在一起"的，因而它们能聚合成"一个东西"。这种区分后来在1925年，由冯。诺意曼(von Neuman）所发展，不一致的多数体成为真类，一致的多数体仍称为集合。不过，冯·诺意曼的区分比康托尔的区分要精确，主要思想是：如果一个多数体是另一个多数体的一个元素，那么它就是一个集合；否则就是一个真类。

康托尔在给戴德金的信中还提出"两个等价的多数体或者两者是集合，或者两者是不一致的"，这一原理可以看成是替换公理的最早表述。（替换公理见下一节）。

二、康托尔悖论

这是关于最大基数的悖论，由康托尔本人在1899年发现。康托尔在1899年7月28日和8月31日给戴德金的信中两次讨论了这一悖论。康德尔指出，所有基数的系统不是一个集合，而是不一致的，绝对无穷的多数体，同所有序数构成的多数体是类似的。然后，康托尔又更明确地表述了最大基数的悖论。设S是一切集合的集合。根据康托尔的幂集定理，$\mathfrak{A}_S > S$。但$\mathfrak{A}_S$是S的一切

① 见 F. G. pp. 113 — 117 。

子集的集合，它必定是一切集合的集合S的一部分，即 $\mathfrak{A}S$包含于S，由此可得：$\overline{\mathfrak{A}S} \leq \bar{S}$。因此产生矛盾。

最大序数的悖论和最大基数的悖论牵涉的概念较多，没有引起数学家们的注意。在1900年巴黎国际数学家大会上，著名数学家彭加勒（H Poincare）高兴地宣布："现在我们可以说，完全的严格性已经达到了。"但是，在1901年6月，罗素考察了上述两个悖论，并且分析了它们的结构以后，发现了一个新的悖论，我们在上面已经提到过，这里只略加说明于下：

三、罗素悖论

令w是所有那些不是自身分子的类所构成的类。这样，不管类x是什么，"x是一个w"等价于"x不是一个x"。以w代x，可得："w是一个w"等价于"w不是一个w"。

罗素在1902年把这一悖论通知了弗雷格，首次发表于1903年出版的《数学的原则》一书。策梅罗独立于罗素，在1903年之前也发现了这一悖论，并通知了希尔伯特。

罗素悖论十分清楚明晰，所牵涉的概念只是素朴集合论中的基本概念——类和分子即集合和元素，所使用的方法类似对角线方法，因而罗素悖论出现之后，震动了西方整个数学界和逻辑学界。

以下是罗素悖论的一种变形：

四、关系悖论

令Q是存在于两个关系R和S之间的一种关系，而R对S没有关系R。这样，不论关系R和S是什么，"R对S有关系Q"当且仅当"R对S没有关系R"。因此，以Q代R和S得：

"Q对Q有关系Q"当且仅当Q对Q没有关系Q"。

集合论悖论的出现引起了第三次数学危机。我们知道，第一次数学危机是古希腊时代无理数的发现，第二次是17、18世纪关

于无穷小量的争论。数学史表明，产生危机是不足怪的，克复了危机恰恰促进了数学的发展。第一次危机之后，古希腊人为了解释无理数的存在，建立了比例论，最后由欧几里德集古希腊数学之大成,写出了数学史上的第一本经典著作《《 几何原本》。欧氏几何建立之后，又引起了平行公设的争论，经过两千年的漫长过程，导致了非欧几何的建立。非欧几何可以在欧氏几何中找到解释，因此，非欧几何相对于欧氏几何是一致的。借助于解析几何，一切几何命题都可表示为实数代数的命题。因此，欧氏几何相对于实数理论是一致的。这样，实数理论就成了几何的基础。第二次数学危机的结果是分析的算术化，把极限理论建立在实数理论之上。在这之后，戴德金把实数定义为有理数的分划，每一个实数都能划分所有有理数为两组，两组没有公共的元素，而合起来则包括有理数域的一切数。这实质上是把实数定义为有理数的无穷集合，也可化归为自然数的无穷集合。康托尔把实数定义为一个收敛的有理数序列，实质上也可化归为自然数的无穷集合。经过戴德金和康托尔的工作，实数理论的相对一致性，即相对于自然数理论和集合论的一致性便确立起来了。由于戴德金和弗雷格的研究，自然数理论被建立在集合论基础之上，也就是说，自然数理论相对于集合论是一致的。因此，集合论的一致性成为整个数学一致性的基础。

然而，正当数学家们还没有来得及证明集合论一致性的时候，却在集合论中接二连三地出现了悖论。这确实是一场大危机，动摇了整个数学的基础。 上文说过，弗雷格在得知罗素悖论后惊呼“ 知识大厦的一块基石突然动摇了 ”,提出 算术是否完全可能有一个逻辑基础 ” 的问题。有的数学家认为，悖论的出现使数学的最后基础和终极意义的问题没有解决。

悖论的出现表明，在康托尔的素朴集合论中有毛病。最主要的弊病就是康托尔对集合的描述 :“ 我们的直观或我们的思维中确定的并可区分的对象所概括成的一个总体 ” 。康托尔把它作为定义，但实际上这根本不是一个数学定义，它不能应用于逻辑推导过

程。由康托尔的描述所决定的概括原则是很不精确、很不严格的，它没有对集合的存在性、集合的限制条件作出科学的规定。根据康托尔的描述，任何一个性质决定一个集合，由此就不能阻止人们去考虑所有集合的集合、所有序数的集合、不包含自身为元素的所有集合的集合，等等。

集合论悖论的出现引起了第三次数学危机，有力地推动了数学家和逻辑学家对数学基础与数理逻辑的研究，出现了一些崭新的理论，我们将在第四节和以下几章加以论述。

五、与集合论悖论不同的一些语义悖论

与集合论悖论出现的同时，也出现了一些语义悖论，它们涉及真假、意义、名称、定义等等语义的概念。这些语义悖论对数理逻辑的发展，特别是对逻辑语义学的发展，起了有益的推动作用。以下是几个著名的语义悖论。

（一）理查德悖论

这是关于定义可数性的悖论，由法国笛戎中学数学教师理查德 J. Richard)在1905年的文章《数学原理与集合问题》中发表。①

理查德研究了用法语语句所定义的一些实数。这对一般语言也是实用的。用语句所能表达的实数定义，其数目是无穷的。但每一个由语句所组成的定义总是按一定的文法规则写出的有穷个字，这些字又是由字母组成的，因此我们可以按照每句话字母多少和字母顺序来排列这些定义。令u_1是第一个定义的实数，u_2是第二个，u_3是第三个，等等。因此，我们有按照确定的次序所写出的用有穷多的字所定义的一切实数，由这些无穷多的定义所组成的集合是可数的，记为E。

理查德构造了一个不属于这个集合的一个实数N：“ 令p是

①见F. G. pp. 142—144。

集合E中第n个实数的第n个小数位的数字；现构造一个实数：其整数部分为0；如果p不是8或9，则其第n位小数为p+1，否则为1。” N不属于E。如果N是集合E的第n个实数，那么它的第n位小数就与那个实数的第n位小数一样，但情况并非如此。另一方面，设引号内的所有字母（引号内的话原为一句法语语句）的汇集用G表示。实数N是用汇集G的字所定义的，也就是用有穷多的字所定义的；因此，它应当属于集合E。但据定义，它不属于E。由此产生悖论。

理查德在构造实数N时使用了康托尔的对角线方法。

理查德的文章原是写给法国《纯粹科学与应用科学一般评论》杂志编者的一封信，发表于1905年6月30日出版的一期《评论》上，编者加了按语。理查德在信的一开头说：“在《评论》1905年3月30日一期上，它吸引人们注意在一般集合论中所碰到的某些矛盾。就序数理论而言，没有必要去找到这些矛盾。”①这是指1905年3月30日《评论》的编者按。按语说，在海德堡举行的第三届国际数学家大会上（1904年8月8日—15日），德国数学家葛尼希J. Konig）证明连续统不能良序，可是不久在1904年9月24日，策梅罗证明任何集合皆可良序。按语没有给出葛尼希的论证，理查德从按语中所知道的信息是简单的，但他受到在集合论中存在‘某些矛盾”这种思想的启发，随即着手构造了实数定义可数性的悖论，并说‘某些其他矛盾可化归于它”。

理查德在文章中还提出了解决悖论的方案。他说：“字母的汇集G是这些排列中的一个；它将出现在我的表中。但在它出现的地方，它是毫无意义的。它提及集合E，而E还未被定义。因此，我必须取消它。汇集G有意义仅当集合E从总体上被定义，但这是不行的，除非用无穷多的字。所以，不存在矛盾。”②简单说来，理查德试图通过根本否定G（即N的定义）来解决悖论。彭

①F. G p. 14 3。

②同上。

加勒在1906年的一篇文章中承认这种解决办法，提出了禁止恶性循环的问题，这一思想由罗素加以发展。皮亚诺在1906年的一篇文章中，提出了自己的看法："理查德的例子不属于数学，而是属于语言学；在N的定义中，某个基本元素不能用精确方法（根据数学规则）来定义。"①皮亚诺的这一思想后来被罗素的学生拉姆赛(Ramsey）在1925年加以发展，拉姆赛将悖论分为两大类：一是集合论悖论或逻辑悖论，二是语义悖论，我们在下一章还要论述这个问题。

古老的说谎者悖论和理查德悖论对于哥德尔证明不完全性定理时构造不可判定的命题有重大的启发作用。我们应当充分肯定理查德悖论的历史意义。

葛尼希不久放弃了他在国际数学家大会上所提出的有漏洞的论证，为连续统不能良序提出了一个新的论证，这个新的论证类似理查德悖论。葛尼希在1905年6月20日把他的悖论通知了匈牙利科学院，他的论文的题目为《论集合论基础和连续统问题》。②理查德悖论和葛尼希悖论差不多是在同时彼此独立地发现的。下面我们根据葛尼希的原文来陈述这一悖论。

（二）葛尼希悖论

象理查德一样，葛尼希也研究了可用有穷多个字定义的实数的集合，但他没有使用对角线方法，而是考察上述集合的补集——非有穷可定义的实数集。

如果实数集可被良序，那么非有穷可定义的实数集也可被良序，而且具有一个首元，因此，这个元素是有穷可定义的。由此，这个补集的首元既是有穷可定义的，又是非有穷可定义的。这样，我们可得结论：实数集不能被良序。这个悖论的产生也与可定义性这个概念有关。

① 转引自F. G. p. 142。
② 见 F. G. pp. 145～149。

葛尼希悖论也可用另一种方式来陈述：

在序数中，有的可用有穷方式定义，有的不能用有穷方式定义。有穷可定义的序数集是可数的，从第一个定义所确定的序数开始。现构造一个序数：“ 在量上大于所有这些序数的第一个序数”,引号内的话的字数是有穷多个,因此,所构造的序数是有穷可定义的，但根据假定，它又不能是有穷可定义的(引号内的话等于说 不是有穷可定义的最小序数”)。

(三)伯尔利悖论

这一悖论是由英国包德莱安图书馆的伯尔利(G Berry)先生告诉罗素的。罗素将它发表于1908年的《 以类型论为基础的数理逻辑》。

我们改用汉语来陈述这个悖论：

“ 用少于十八个汉字不能命名的最小整数”。这个名称必定指称某一确定的整数，但它是用17个汉字组成的，因此这个整数可用17个汉字来命名。

这个悖论实质上同上述两个悖论是类似的，只不过这里用了“ 用少于十八个汉字可命名的”代替了 用有穷方式可定义的”。

(四)格里林悖论

这一悖论是德国哲学家格里林(K Grelling) 在1908年发表的。

在语言中,形容词可分为两类。第一类,如 中文的”,这个形容词本身也是中文的“;短的”也是短的 这类适用于自身的形容词称为自谓的。第二类,如 法国的”,这个形容词并不是法国的“; 红的”不是红的“; 园的”不是园的 这些不适用于自身的形容词称为它谓的。

现在问：“ 它谓的”这一形容词是不是它谓的呢？

如果说 它谓的”是它谓的,那么它就应当是自谓的,即不是它谓的 如果 它谓的”不是它谓的,那么它就应当是它谓的。也就是说“; 它谓的”是它谓的当且仅当 它谓的”不是它谓的。

我们可用符号表示这一悖论：

设 Pd( ) 表示______是自谓的，则¬Pd( )表示_____是它谓的。或者¬Pd(¬Pd)(“它谓的”是它谓的）是真的，即¬Pd是自谓的，因而Pd(¬Pd）也是真的；或者¬Pd(¬Pd）是假的，这时¬Pd不适用于自身，即¬Pd是它谓的，¬Pd(¬Pd）是真的。因此得出：

$$Pd(\neg Pd) \longleftrightarrow \neg Pd(\neg Pd)。$$

如果我们按照字典次序来排列形容词的话，那么格里林悖论也可看成是理查德悖论的变形。

在第三次数学危机期间，区分集合论悖论和语义悖论的任务还没有来得及提到日程上来，在这样的情况下，理查德悖论、葛尼希悖论等语义悖论的出现，立即加入到集合论悖论的行列中去，大大增强了第三次数学危机的强度，也迫使数学家和逻辑学家们提出各种方案，来对付已经出现的形形色色的悖论。

第四节 公理集合论的建立

为了解决由集合论悖论所引起的第三次数学危机，不少数学家和逻辑学家致力于创建一些足以能避免悖论的新理论。公理集合论是其中的一种，其中心思想是用集合论公理对集合的存在性作出规定和限制，也就是说，用集合论公理给出集合的隐定义，这就克服了康托尔集合论的素朴性和不严格性，避免了已发现的集合论悖论。下面我们来论述这一新学科的建立过程。

一、策梅罗－弗兰克尔的公理集合论

策梅罗在1908年发表论文《集合论基础研究》，①这标志着公理集合论的建立。策梅罗在论文的一开头说：“集合论是数学的

①见F. G. pp. 199—215。

一个分支,其任务是数学地研究‘数’,‘次序’和‘函数,这些基本观念，研究时要按照这些观念的原始的简单形式，并由此而发展全部算术和分析的逻辑基础；因此，它构成了数学科学的一个不可缺少的成分。然而，现在正是这门学科的存在似乎受到某些矛盾或‘悖论’的威胁，这些悖论可从它的原理(看来是必然支配我们思维的原理）导出来，对这些悖论尚未找到任何一个令人满意的解决办法。特别是由于不包含自身作为元素的所有集合的集合这个‘罗素悖论，的出现，今天看来这一学科不允许对一个任意的逻辑可定义的观念指派一个集合或类作为它的外延。康托尔原来把集合定义为‘把我们的感觉或思维的确定的不同对象聚为一个总体的汇合，，所以这一定义确实需要某种限制；然而这一定义尚未成功地被一个简单而又不引起这些怀疑的定义所代替。在这些情况下，关于这一点，没有什么东西供我们使用，我们只能反其道而行之，从历史上给定的集合论出发，寻求为确立这门数学学科的基础所需要的原理。另一方面，在解决问题时，我们必须使这些原理充分地限于排除一切悖论，同时使它们足够广泛，以保留在这一理论中的一切有价值的东西。”①

策梅罗的这段话极其重要，深刻地阐明了他创建公理集合论的背景和目的。他告诉我们，罗素悖论的出现使得康托尔的集合定义成了问题，必须加以限制。他的基本思想就是要提出一些原理来规定、限制集合，其目的有两个：一是排除一切悖论，二是保留康托尔集合论中一切有价值的东西。策梅罗用公理集合论达到了目的。

我们先陈述一些初始概念和基本定义。在策梅罗的系统中，“集合”是初始概念即不定义的概念,其性质由一组公理来规定。另外,要假定一对象域 用 $\mathfrak{B}$ 表示），其中有集合。如果两个符号 a 和 b 指称同样的对象，我们就记为 $a=b$，否则记为 $a \neq b$。如

---

①F. G. p. 200。

果一个对象a属于域$\mathfrak{B}$,那么我们就说它"存在"。还要假定一个基本关系$a \in b$，这是在域$\mathfrak{B}$的对象之间的关系。如果$a \in b$对两个对象a和b成立，我们就说b是一个集合，a是这个集合的元素。(公理II假定有一集合，没有任何元素，即空集合)。

如果一个集合M的每一元素x也是集合N的一个元素，使得从$x \in M$总得到$x \in N$，那么我们就说M是N的一个子集，记为$M \in N$。符号$\in$是施罗德使用的"包含于"符号，相当于现在所用的"$\subseteq$"。两个集合M和N如果没有公共元素，那么它们称为全异的。

策梅罗还引进了"确定性"这个重要概念。一个问题或断定被称为确定的，如果借助公理和普遍有效的逻辑规律，域的基本关系不是任意地决定它是否成立。命题函项$A(x)$是确定的，如果它对某类中的每一个体x是确定的。因此，$a \in b$是否成立的问题总是确定的，同样$M \in N$是否成立的问题也是确定的。

策梅罗系统关于集合的公理有以下七条：

公理I(外延性公理)。如果一个集合M的每一元素也是N的一个元素，反之亦然，因此如果$M \in N$并且$N \in M$，那么$M=N$。简言之，每一集合由它的元素确定。

公理II(初等集合公理)。存在一个(想象的)集合，即空集0，它不包含任何元素。如果a是域的任一对象，那么存在一个集合$\{a\}$，它包含a并且仅仅是a作为元素；如果a和b是域的任意两个对象，那么总存在一个集合$\{a, b\}$，它包含a和b作为元素并且没有一个对象x不同于两者。

根据公理I，初等集合$\{a\}$和$\{a, b\}$总是唯一确定的，空集仅仅有一个。

公理III(分离公理)。如果命题函项$A(x)$对集合M的所有元素是确定的，那么M就有一个子集M_1，使得它的元素恰恰是M中使$A(x)$成立的那些元素x。

公理IV(幂集公理)。对每一集合T，相应有第二个集合$\mathfrak{U}T$

(T的幂集），它恰好包含T的一切子集作为元素。

公理(V并集公理)。对每一集合T,相应有一个集合UT (T的并集），它恰好包含T的元素的元素作为元素。

公理VI （选择公理）。如果T是一个集合，其元素全都是不同于空集0并互相全异的集合，那么它的并集UT至少包含一个子集 S_1，它与T的每一元素有一个并且仅仅一个共同元素。

策梅罗还提出了选择公理的另一种表述方式：从T的每一个元素M,N,R,…总可能选出一个单个元素并且把所有被选出的元素m，n，r，…组合为一个集合S_1。

选择公理有许多等价形式。上文说过，康托尔提出了“任何两个不等的基数必有一个较大”和良序定理“任何集合皆可良序”等两种形式。但在数理逻辑发展史上，第一次明确表述选择公理的学者是策梅罗。他在1904年的论文《每一集合皆能被良序的证明》中提出了选择公理的两种表述，并证明了从选择公理可导出良序定理。第一种表述是：“对一个无穷的集合的总体，总存在一个映射，使得它的一个元素在映射之下同每一集合相联，或者形式地表达为：一个无穷的集合的总体之积（每一集合至少包含一个元素）本身不是空集。”①这种表述方式现在常简化为：如果S是非空集合的一个集合，那么有一函数f使得对每一x∈ s, f(x) ∈x。

罗素在1906年的《超穷数和序型理论中的一些困难》和1908年的论文《以类型论为基础的数理逻辑》中提出了选择公理的另一种形式：给定互相排斥的集合的一个集合，其中无一集合是空的，那么至少存在一个集合，它由给定集合中的每一集合的一个元素组成。②罗素把选择公理称为“乘法公理”。

策梅罗1904年的表述与罗素的表述是等价的形式，他们两入都作了证明。因此，策梅罗在1908年表述选择公理时实际上采用了罗素的形式。

①F. G. p. 141。
②F. G. p. 180。

公理Ⅶ 无穷公理）。在域中至少存在一个集合Z，它包含空集作为一个元素，并且对它的每一元素a相应有{a}这种形式的另一元素，换句话说，对它的每一元素a，它也包含相应的集合{a}作为一个元素。

策梅罗用以上七条公理推导出集合论的一切主要定理。他的基本思想同罗素在1906提出的“限制大小理论”相仿，即认为所有“事物”的汇合,所有序数的汇合等等太“大”的汇合不是集合。康托尔和葛尼希在发现悖论时也提出了这一思想。罗素后来放弃了“限制大小理论”,采用了著名的逻辑类型论(见下章)。策梅罗发挥了这种限制集合大小的思想，认为集合不仅仅是汇合，它们是满足一些公理条件的对象。在七条公理中，外延性公理是对集合作一种限制，由给定的一组元素只能决定一个集合，而不是多个。其他六条公理都是对概括原则的具体规定，都是关于集合存在性的公理。公理Ⅲ(分离公理)比概括原则要弱,它只断定任一适当定义的性质从必须先给出的一个集合M分离出一个子集。这一公理（实际是公理模式）现在常常被称为子集公理模式。它表明，不是任一性质都能决定一个集合，而是满足性质A的元素必须同时是给定集合M的元素，也就是说，一个性质只能决定从给定的集合分离出一个子集，反过来说，并非任一集合的一部分都是一个集合，要能从给定的集合分离出一个子集必须满足一个性质。分离公理不允许通过集合自身加以定义的元素所构成的这种悖论“集合”，因此,布拉里一福蒂悖论中的所有序数的“集合”,康托尔悖论中的所有基数的“集合”和罗素悖论中的所有不是自身元素的集合组成的“集合”等等,统统都不是集合,因为根据分离公理,我们找不到某种集合，使它能包含上述悖论中的所谓“集合”。分离公理解决集合论悖论可以说是“釜底抽薪”,根本不承认悖论中的“集合”是集合，当然也就消除了悖论。此外，由于确定的性质是用域𝔅的基本关系可决定的性质，因而在定义集合时就不存在使用像“用有穷多个字可定义的”这样性质的问题，这样，理查德悖论之类的语

义悖论也可排除。

无穷公理保证了在 $\mathfrak{P}$ 中有元素 $0, \{0\}, \{\{0\}\},$ …等元素的一个集合 Z_0 的存在。这个集合用于表示自然数集合。

策梅罗在建立了公理系统之后，详细讨论了集合的等价（等势）理论，证明了许多重要定理。策梅罗所建立的系统为公理集合论的发展奠定了坚实的基础。在策梅罗的系统中还存在一些缺点，这对于刚刚建立的新学科来说是不可避免的。最主要的缺点是“确定性”和“确定的性质”这个概念的模糊性。分离公理断定一个确定的性质从一个已给的集合分离出一个子集。策梅罗在定义“确定的性质”时诉诸“普遍有效的逻辑规律”；由于他完全没有注意集合论所需要的基础逻辑，因而这些逻辑规律没有被列举出来。

1922 年 8 月，著名的挪威数学家斯科伦（T. Skolem）在第五届斯堪的纳维亚数学家大会上发表了《对公理集合论的一些评论》的讲演。①他指出，确定性概念实际上可用很自然的方式加以精确表述。他首先提到数理逻辑的五种运算（采用了施罗德的记法）：

(1 ×) 合取，用一个点或用并置法表示；

(1 +) 析取，用记号十表示；

(2) 否定用在被否定的表达式上加一横的办法表示；

(3 ×) 全称量词，用记号 Π 表示；

(3 +) 存在量词，用记号 Σ 表示。

然后，斯科伦把“确定的命题”定义为“从 $a \in b$ 或 $a = b$ 这些形式的初等命题使用所说的五种运算所构成的一个有穷的表达式”。②他认为，这是一个十分明确的概念，并且也是充分广泛的概念，使得我们可以进行一切集合论证明。

斯科伦的方法实际上是把策梅罗的公理集合论嵌入带谓词常项 ∈ 和 = 的一阶逻辑演算之中。这是对策梅罗的公理集合论所做的重大改进。此外，斯科伦在讲演中指出了策梅罗集合论的局限

---

① 见 F. G. pp. 290 — 301 。

② F. G. p. 292。

性：它不能保证某些“大”集合的存在，例如集合$\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots\}$，这里$Z_0$是自然数集合，$Z_i$是$Z_{i-1}$的幂集。他的论证要点如下：集合0，$\{0\}$，$\{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}, \cdots$称为第一层集合。所谓第一层集合就是有一非负正整数$n$使得第$n$个并集为0（集合$M$的第一个并集由其元素的元素汇集而成，余类推）。$Z_0$是第二层集合。第二层集合本身不是第一层集合，但有一n使第n个并集的所有元素是第一层集合。由此还有第三层集合，等等。给定域B，在其中策梅罗的公理成立。在B中第一层和第二层集合形成一个子域B'。集合Z_0属于B'；然而如果无穷序列$Z_0, Z_1, Z_2, \cdots$在B'中构成一个集合即$\{Z_0, Z_1, Z_2 \cdots\}$，那么很显然它不是第二层集合而是第三层集合，因此这样的集合不能出现在B'中（因为这个集合的第n个并集包含集合Z_0作为元素）。所以，集合$Z_0, Z_1, Z_2, \cdots$不能构成在B'中的一个集合的元素；这就是说，这样一个集合$\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots\}$的存在在策梅罗的系统中是不可证的。为此,斯科伦引入以下公理（替换公理）：

令U是在域B中对某些对子（a，b）成立的一个确定命题；再假定对每一a，至多存在一个b使得U是真的。当a的变程是一个集合M_a的元素时，b的变程是一个集合M_b的所有元素。

由这条公理可导出集合$\{Z_0, Z_1, Z_2, \cdots\}$的存在，①这就克服了策梅罗系统的缺点。

在斯科伦改进策梅罗公理系统的同时，耶鲁撒冷希伯来大学数学教授弗兰克尔（Abraham A. Fraenkel, 1891—1965）也在从事改进策梅罗系统的工作。他在1922年发表的论文《“确定的”观念与选择公理的独立性》中，②对分离公理作了修改，并用来证明选择公理的独立性。弗兰克尔说：“公理III（分离公理）是策梅罗在1908年表述的，包含有不精确的观念‘确定的，，为达到精确陈述公理III的目的，我们将把函项理解为以下的一种规则：一个

① 见 F. G. p. 297。

② 同上 pp. 284—289。

对象 $\varphi(x)$ 可以从对象（变元）x（变程是一集合的元素）并可从另外给定的对象（常项）通过公理II—IV所规定的应用（当然只重复有穷多次，并用 φ 表示）来构成。例如，$\varphi(x)=\{\{\{x\},\{0\}\},\mathfrak{U}_x+\{\{0\}\}\}$。显然，这不包含函项或对应的一般概念，或任何新的基本概念。”①这实际是说，x的幂集，x的并集，依赖x的无序对集合以及常集合都称为x的函项，x的函项的函项也是x的函项。

弗兰克尔借助函项这个概念，重新表述了策梅罗的公理III即分离公理：

如果给定一个集合M以及按一定次序给定两个函项φ和ψ，那么M就有一个子集M'，它的元素是M的所有元素x，对这些元素而言，$\varphi(x)$是$\psi(x)$的一个元素（或$\varphi(x)$不是$\psi(x)$的一个元素），此外别无其他元素。

弗兰克尔表述的分离公理去掉了策梅罗原来公理中“确定的性质”的模糊性，代之以两个明确的函项，由它们来决定从一个集合分离出一个子集。这就使分离公理的表述具有了精确性。

弗兰克尔并不以此改进为满足，就在同时，他继续深入探讨了策梅罗系统的局限性。也许是“英雄所见略同”的缘故吧，他在1922年发表的另一篇文章《康托尔一策梅罗集合论基础》中提出了同斯科伦的观点几乎一样的观点，以及替换公理。弗兰克尔指出，策梅罗的公理VII肯定了无穷集Z_0（其元素为$0,\{0\},\{\{0\}\},\cdots$）的存在，公理IV又产生了集合$Z_1=\mathfrak{U}Z_0$（Z_0的幂集），$Z_2=\mathfrak{U}Z_1,\cdots$，其基数越来越大；但在策梅罗原来的公理中没有一条能保证存在着Z_0,Z_1,Z_2等所有这些集合的一个集合。为此，弗兰克尔提出了替换公理：

如果M是一个集合，并且如果M的每一元素被“域$\mathfrak{B}$中的事物”所替换，那么M也变为一个集合。②

①F. G. p. 286。

② 参看 Kneebone, Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics, London, 1963, p. 291。

弗兰克尔在1921年已提出这一公理。我们把他的表述同斯科伦的表述对比一下可以看出，虽然它们的用语不同，但其精神实质是一致的。冯·诺意曼(von Neuman, 1903—1957)在1925年对替换公理作了新的更严格的表述：

令A是一个集合，f(x)是在A中定义的函数；那么存在一个集合B，它对A的每一元素x，含有f(x)的值，并且不包含其他东西。①

我们可把f(x)称为替换函数，替换公理是说，函数f(X)的定义域在A中时，那么它的值域在B中。

上文说过，替换公理的最早表述应当归功于康托尔。他说："两个等价的多数体或者都是集合,或者都是不一致的。"②

替换公理是一条很强的公理，由它可推出分离公理和其他一些重要性质。这样，在策梅罗的系统中，分离公理就让位于替换公理。

但是，问题还未完全解决。1917年，法国数学家梅里马诺夫(D. Mrimanoff)又提出了一个集合论悖论，这是关于在策梅罗系统中允许存在"异常集"的悖论。所谓"异常集"是指$a=\{a\}$，或一个下降的集合序列：$a_1=\{a_2\}$，$a_2=\{a_3\}$，…。这种异常集在集合论中必须被排除。弗兰克尔提出用"限制公理"加以排除，他没有精确表述，大致是说：

除了其存在性是公理绝对需要的集合之外，没有其他集合。

冯·诺意曼用他所创立的集合论语言严格表述了这个限制公理。在现在的集合论中,这一公理称为"正则公理"或"基础公理",表述为：

每一非空集合s包含一个元素t，使得s和t没有共同元素。

根据正则公理，排除了$s\in s$即$s=\{s\}$这样的异常集。

综上所说，策梅罗的公理集合论经过斯科伦、弗兰克尔等人的

---

① F. G. p. 398。

② F. G. p. 114。

改进，变为一个严格的形式化的公理系统，其语言是一阶逻辑语言，其非逻辑公理有：

1. 外延性公理。

2.无序对公理。

3.空集公理。

2和3两条公理是从公理 II（初等集合公理）分化出来的。

4. 替换公理模式。

5. 分离公理模式。这条公理可从公理4推出，但由于它使用起来比较方便，因而被保留了。

6.幂集公理。

7.并集公理。

8.无穷公理。

9.正则公理。

10. 选择公理。

在数理逻辑文献中，把公理1—9（或公理1—3，5—9）称为策梅罗一弗兰克尔系统，记为ZF系统，把包括公理10（选择公理）的系统记为ZFC系统（C是选择（Choice）的第一个字母）。

ZF系统是公理集合论的一种，此外，冯·诺意曼、贝尔纳斯等人对公理集合论的发展都作出了重要贡献。

二、冯·诺意曼的公理集合论

冯·诺意曼是著名的美国科学家，出生在匈牙利。他的研究领域十分广泛，涉及量子论、集合论、连续几何、算符环、理论流体力学、计算技术、自动机理论以及博奕论等。

冯·诺意曼在1923一1929年间连续发表了6篇集合论论文。这些论文在公理集合论的发展史上具有重要意义。冯·诺意曼在这些论文中，提出了一种新的序数理论，与此相关为超穷归纳法的定义作了论证，推广了策梅罗和弗兰克尔的集合论，构造了一个新的公理集合论系统，并讨论了相对一致性的问题。

首先,我们谈谈冯·诺意曼对序数理论的改进。上面说过,康托尔把序数定义为良序集的序型，而序型就是相似于一个给定序集的所有序集的共同性质。罗素在1903年引进“等价类”的概念。因此，序型可定义为在相似关系之下的等价类，而序数就成了良序集的等价类，即与一给定良序集等价的一切良序集的类。这种定义在素朴集合论中潜伏有悖论的危险，因为这里涉及了一切集合的集合。冯·诺意曼在1923年发表《论超穷数的引进》的论文，提出了一种新的序数理论。①他使用素朴集合论的语言加以表达，假定了良序集和相似性的概念。按照冯·诺意曼的看法，序数是一种特殊的良序集,是良序集的等价类中选出的“代表”,任何一个良序集都相似于一个序数。任何一个序数是位于它之前的序数的集合。○是空集，序数有：

0=○，

1={○}，②

2={○，{○}}，

3={○，{○}，{○，{○}}}，

ω={○，{○}，{○，{○}}，{○，{○}，{○，{○}}}，…}，

ω+1={○，{○}，{○，{○}}，…，{○，{○}，{○，{○}}，…}}，

……

这还不能算是序数的定义，只是对序数产生过程的描述，如果建立在序数之上的超穷归纳法的定义原理确立之后，上述的描述可成为定义。冯·诺意曼在1923年文章的结尾给出了超穷归纳法定义原理的证明大纲。冯·诺意曼的这种序数理论可以用于通常的公理集合论中。他在1925年构造的系统中就用了这种理论。1928年，他详细证明了超穷归纳法定义原理，并对他的序数理论

① 见 F. G. pp. 346 — 354 。

②冯·诺意曼原来用圆括号。

作了改进，严格证明了对每一良序集，存在唯一的一个序数。

冯·诺意曼把序数看成是在前序数的集合，这种看法有两大优点：1.它不但可应用于有穷序数,也可应用于无穷序数；2.序数的次序关系只由关系∈(属于)确定，具有∈关系的传递性。但冯诺意曼对序数的处理不是直接的，没有脱离良序集和相似性的概念。1937年美国逻辑学家罗宾逊(R. M Robinson)直接给出了一个新的序数定义：①

一个序数 u 是一个集合使得

(1) 如果 $x \in u$ 并且 $y \in u$，那么 $x \in y$，或 $x = y$，或 $y \in x$。

(2) 如果 $x \in y$ 并且 $y \in u$，那么 $x \in u$。

这就是说，一个序数是一个集合，具有∈连接性和传递性。

冯·诺意曼和罗宾逊的序数定义在现在的集合论著作中都有广泛应用。

冯·诺意曼1925年发表著名论文《集合论的一种公理化》，②建立了公理集合论的另一个系统，并在1928的文章《集合论的公理化》中作了详细的展开。

在冯·诺意曼的系统中，策梅罗的理论实质上被保留下来，但所用的语言完全不同。策梅罗用的是关于集合和元素的表述，而冯·诺意曼采用的是关于函项和变目的语言。所用语言的差别并不是主要的，因为这两种语言是等价的，任何函项可解释为有序对的一个集合，而任何集合也可用特征函项来描述。冯·诺意曼所用的语言全完可以翻译成集合的语言。策梅罗系统与冯·诺意曼系统的主要差别在于两者排除悖论的方式不同。上文说过，策梅罗对集合的存在性作了种种严格的限制。冯·诺意曼作了推广，引进了两种汇合体，一种是策梅罗意义下的集合，另一种是类。所有的集合都是类，但不能作元素的类不是集合，这种类后来称为真类。冯·诺意曼严格确定了"集合"和"类"这两个概念,通俗地说，

① 转引自 F. G p. 346 — 347。

② F. G pp. 393 — 413。

集合’是一种不太大’的总体,而‘类’是不问其‘大小’的所有总体。冯·诺意曼用公理刻画集合和类的特征，并可排除集合论悖论。因为所有集合的类，所有序数的类等等都不是集合，而是真类，所以，罗素悖论、康托尔悖论、布拉里-福蒂悖论等都不能产生。冯·诺意曼引进“类”概念，这就使得通常与类概念有关的数学论证得以保留，能够使用概括原则，同时又能避免悖论。冯·诺意曼关于集合和类的区分的思想并不是从天上掉下来的，也不是他头脑里固有的，而是有历史的原因。一方面，这是对策梅罗的思想的推广，另一方面也是对康托尔和葛尼希的思想的发展。上文说过，康托尔在1899年就提出要区分‘集合(“一致的多数体’)和‘不一致的多数体”，葛尼希在1905年提出要区分“完成了的集合”即“集合”和“产生过程中的集合”即“类”。冯·诺意曼的历史功绩在于他构造了包含‘集合’和‘类’这两个概念的公理系统。下面,我们概括一下这个系统的结构。

首先有两个对象域，一是变目域，二是函项域；两者相交，构成变目—函项域。函项x对变目y的值记为[x，y]，第一个变元x总是“函项”，第二个变元y总是“变目”。[x, y]也可作为变目。在公理中‘变目’改称Ⅰ-对象‘函项’为Ⅱ-对象(实际上是类的特征函项)‘变目—函项’为Ⅰ-Ⅱ-对象(实际上是集合的特征函项)。另外，有两个常“变目”A和B，它们实际上是表示集合的那些函项的两个值。有序对(x, y)，其变元x和y两者一定是“变目”，本身又产生一个变目(x, y)。有序对的最重要性质是从$x_1=x_2$和$y_1=y_2$可推出$(x_1, y_1)=(x_2, y_2)$。

公理主要分为五组。

1. 预备公理

1. A和B是Ⅰ-对象。

2. [x, y]有意义当且仅当x是一个Ⅱ-对象，y是一个Ⅰ—对象它本身总是一个Ⅰ-对象。

3. (x，y)有意义当且仅当x和y是Ⅰ-对象；它本身总是一个

Ⅰ-对象。

4. 令 a 和 b 是Ⅱ-对象；如果对所有Ⅰ-对象 x，[a, x]=[b，x]，那么 a=b。

公理 14 就是外延性公理。

Ⅱ. 算术构成公理

1. 存在一个Ⅱ-对象 a 使得总有 [a, x] -x。

2. 令 u 是一个Ⅰ-对象；那么存在一个Ⅱ-对象 a 使得总有 [a, x]=u 。

3. 存在一个Ⅱ-对象 a 使得总有 [a, (x, y)]=x 。

4. 存在一个Ⅱ-对象 a 使得总有 [a, (x, y)] = y。

5. 存在一个Ⅱ-对象 a 使得（如果 x 是一个Ⅰ-Ⅱ-对象）总有 [a, (x, y)] =[x, y]。

6. 令 a 和 b 是Ⅱ-对象；那么存在一个Ⅱ-对象 c 使得总有 [c, x] =（ [a, x]，[b, x] }。

7. 令 a 和 b 是Ⅱ-对象；那么存在一个Ⅱ-对象 c 使得总有 [c, x] =[a ，[b, x]] 。

这组公理都是关于产生函项方式的公理。

Ⅲ. 逻辑构成公理

1. 存在具有以下性质的Ⅱ-对象 a: x= y 当且仅当 [a, (x, y)] ≠ A。

2. 令 a 是一个 Ⅱ-对象，那么存在具有以下性质的Ⅱ-对象 b: [b，x] ≠ A 当且仅当对所有 y，[a, (x, y)] =A。

3. 令 a 是一个Ⅱ-对象，那么存在一个Ⅱ-对象 b 使得当对一个唯一的 y，[a, (x, y)] ≠ A 成立时，[b, x] 等于那个 y。

以上公理也是关于产生函项的方式。

Ⅳ. Ⅰ-Ⅱ-对象的公理

1. 存在一个具有以下性质的Ⅱ-对象 a：一个Ⅰ-对象 x 是一个Ⅰ-Ⅱ-对象当且仅当 [a, x] ≠ A。

2. 一个Ⅱ-对象 a 不是一个Ⅰ-Ⅱ-对象当且仅当存在一个Ⅱ-

对象 b 使得对每一个Ⅰ-对象 x，有一 y 使 $[a, y] \neq A$ 而 $[b, y] = x$。

公理Ⅳ$_1$ 规定了Ⅰ-对象是Ⅰ-Ⅱ-对象的条件。公理 Ⅳ$_2$ 是一条极其重要的公理，它是说，对一个具有 $[a, y] \neq A$ 性质的Ⅱ-对象 a，有一个映射 b 使它的变目映射到所有变目的总体上，这样的一个Ⅱ-对象 a 就不能成为Ⅰ-Ⅱ对象。这实际上是说，确定了一个过大总体的函项不能作变目。这条公理也保证我们可把具有下列性质的任一函项 $a(\neq A)$ 作为变目：使 $[a, x] \neq A$ 的所有 x 的总体都是使 $[b, x] \neq A$ 的所有的 x 总体（或一部分）的映像，这里 b 是已知的一个变目的函项。

冯·诺意曼给出了如下定义：“一个Ⅱ-对象 a 称为一个类如果 $[a, x]$ 总等于 A 或 B。一个Ⅰ-Ⅱ-对象如果满足上述条件则称为一个集合。”①根据这个定义,集合是'不太大'的总体,类包括一切总体（包括过大的总体）。能成为变目即Ⅰ-Ⅱ-对象的类就是集合，不能成为变目的类不是集合，而是真类。

根据定义,公理Ⅳ$_2$ 是说，真类不能作其他类的元素；集合可作其他类的元素。

公理Ⅳ$_2$ 是一条很强的公理，从它可以推出策梅罗的分离公理，弗兰克尔的替换公理以及良序定理（不用选择公理）。

Ⅴ. 无穷公理

为陈述无穷公理，冯·诺意曼引进以下一些记法：

令 a 是一个Ⅱ-对象。我们把 $[a, x] \neq A$ 记为 $x \in a$。“$\in$”实际上是‘属于”。

令 a 和 b 是Ⅱ-对象。如果 $x \in a$ 得出 $x \in b$，则 $a \lesssim b$。$b \lesssim a$ 可写成 $a \gtrsim b$。如果 $a \lesssim b$ 并且 $a \gtrsim b$，则 $a \sim b$。如果 $a \lesssim b$ 但并非 $a \gtrsim b$ 则 $a<b$；如果 $a \gtrsim b$ 但并非 $a \lesssim b$，则 $a>b$。在以上记法中，“$\lesssim$”相当于‘包含于”，“$<$”相当于‘真包含于”，“$\sim$”相

①F, G p. 43。

当于“相等”。

冯·诺意曼的无穷公理有三条：

1. 存在一个有下列性质的Ⅰ－Ⅱ－对象 a：有Ⅰ－Ⅱ－对象 x，使 $x \in a$；如果对一个Ⅰ－Ⅱ－对象 x，$x \in a$，那么就有Ⅰ－Ⅱ－对象 $y \in a$ 而 $x < y$。

这条公理相当于ZF系统中的“无穷公理”，意为有一个无穷集合 a，它不是太大的。

2. 令 a 是一个Ⅰ－Ⅱ－对象；那么存在一个Ⅰ－Ⅱ－对象 b，使得从 $x \in y$ 和 $y \in a$（因而 y 是Ⅰ－Ⅱ－对象）可得 $x \in b$。

这条公理相当于ZF中的并集公理。它是说，如果 a 是本身不太大的集合的一个不太大的集合，那么 a 的元素的元素的集合 b 也不是太大的。

3. 令 a 是一个Ⅰ－Ⅱ－对象 那么存在一个有下列性质的Ⅰ－Ⅱ－对象 b：如果 $x \lesssim a$（x 是Ⅰ－Ⅱ－对象），那么就有一个Ⅰ－Ⅱ－对象 y 使 $x \sim y$ 并且 $y \in b$。

这条公理相当于ZF系统中的幂集公理。它是说，如果 a 是一个不太大的集合，那么 a 的所有子集的集合 b 也不是太大的。

冯。诺意曼的三条无穷公理是关于产生Ⅰ－Ⅱ－对象的方法的公理。

在这五组公理的基础上，就可以进行集合论的推导，这些推导包括：直接从公理导出的并集、交集和幂集存在的一般定理，等等；在公理系统中引进次序和良序的定义并证明有关定理，例如，如果两个序集相似于第三个序集则它们彼此相似，如果两个序集之一是良序集则另一个也是良序集，等等；给出序数的严格定义，展开序数的重要性质，特别是良序集的可比较性和超穷归纳法的合理性；借助序数理论和公理 IV_2 证明良序定理；在序数理论和良序定理的基础上发展超穷基数的理论；给出有穷集合和无穷集合的定义，展开它们的性质，证明无穷集合的存在并定义最小的无穷序数 ω 等等。

冯·诺意曼为使他的系统严格，还增加了以下第六组公理：

VI．1.所有Ⅰ-对象是Ⅰ-Ⅱ-对象（有了这条公理可去掉ⅠVl）。

2. A=○，B={○}（○是没有元素的集合即空集，{○}是包含一元素○的单元集，○和{○}是不同的）。这条公理是对两个常变目A和B的规定。

3. (u, v)={{u, v}, {u}}。这是关于有序对的定义，这个定义原是波兰逻辑学家库拉托斯基（K. Kuratowski）在1921年给出的。根据这个定义，从（u, v）=（x，y）即{{u，v}，{u}}={{x, y}，{x}}可以得出u=x并且v=y。

4.不存在任一个Ⅱ-对象α使得，对每一个有穷序数（即整数）n，[α，n+1]∈[α, n]。

冯·诺意曼提出的公理VI 4就是"基础公理"或"正则公理"，它可排除"异常集"。公理VI 4的表述与我们在上面的表述是一致的，它实际上是说，在α中有一个最小元素，它不再含有α的元素了。

冯·诺意曼的系统推广了策梅罗一弗兰克尔的系统，但是比较复杂。后来，罗宾逊（R. M Robinson）在1937年，贝尔纳斯在1937一1954年和1958年，哥德尔在1940年，对冯·诺意曼的系统都作了简化、修改和扩充，形成了著名的冯·诺意曼一贝尔纳斯一哥德尔集合论系统，记为NBG或BG系统。下面我们论述贝尔纳斯对BG系统的奠基工作。

三、贝尔纳斯对冯·诺意曼系统的改进

贝尔纳斯是瑞士著名数学家和逻辑学家，前文曾经提及。他长期是希尔伯特的合作者，在数理逻辑本身有很多建树，如证明了罗素的逻辑演算的第四条公理不是独立的，协助希尔伯特构造了一个新的逻辑演算，等等。在集合论方面，他在1937一1954年在《符号逻辑杂志》发表7篇公理集合论的文章《公理集合论的一个系

统，Ⅰ－Ⅶ》，①在1958年出版了专著《公理集合论》，②进一步完善了他的系统，对冯·诺意曼的系统作了重大改进，奠定了BG系统的基础。

贝尔纳斯发展了斯科伦的思想，明确地把一阶谓词演算作为公理集合论的逻辑基础。在贝尔纳斯的系统中，有“集合”和“类”两种初始对象，分别用小写拉丁字母和大写拉丁字母表示，这对冯·诺意曼的做法作了改进。对任何两个集合a和b，或$a\in b$或$a\notin b$；对任一集合a和任一类$\mathfrak{P}$，或$a\in\mathfrak{B}$或$a\notin\mathfrak{P}$，按照a是否具有$\mathfrak{B}$的定义谓词所表达的性质（贝尔纳斯原来对集合属于类的关系用另一种符号，后来哥德尔仍用∈，贝尔纳斯也采用了）。一个类不能作为集合或类的元素，也就是说，$\mathfrak{U}\in b$或$\mathfrak{U}\in\mathfrak{P}$不是合式公式。一个集合和一个类可以有同样的元素，这时这个类被说成用集合表示（哥德尔对此作了改进：把集合和集合所表示的类等同起来，把不能用集合表示的类称为真类，它不能做集合或类的元素）。贝尔纳斯的“集合”、“类”和“一个类和表示它的集合”大致相当于冯·诺意曼的Ⅰ－对象，Ⅱ－对象和Ⅰ－Ⅱ－对象。

“相等”是初始关系，联结两个集合词项。两个类词项A和B之间的等价关系$A\equiv B$可定义为：

$$(A\equiv B)\longleftrightarrow(\forall x)(x\in A\longleftrightarrow x\in B)。$$

概括原则加以形式化以后适用于类词项。

初始公式有以下三种形式：$a=b$, $a\in b$, $a\in\mathfrak{P}$。

为便于同冯·诺意曼的系统相比较，我们现将贝尔纳斯的非逻辑公理陈述如下：

关于相等性和外延性的公理有：

---

①P. Bernays, A system of axiomatic set theory, Ⅰ—Ⅶ, J. Symb. Logic, 2(1937), 65—77; 6(1941), 1—17; 7(1942), 65—89; 7(1942), 133—145; 8(1943), 89—106; 13(1948), 65—79; 19(1954), 81—96。

② Bernays, P. & Fraenkel, A. A. Axionmatic Ser Theory (Amsterdam, 1958).

E_1　$a=b \to (a \in A \to b \in A)$，

E_2　$(\forall x)(x \in a \longleftrightarrow x \in b) \to a=b$。

一般集合论公理有：

A_1　$a \notin 0$（0是一个空集）。

A_2　$a \in b; c \longleftrightarrow a \in b \vee a=c$（$b; c$是一个集合，其元素是$b$的元素和集合$c$）。

A_3　$a \in \sum_{\xi}(m, t(\xi)) \longleftrightarrow (\exists \xi)(\xi \in m \wedge a \in t(\xi))$［$\sum_{\xi}(m, t(\xi))$是一个集合，其元素是那些集合，它们至少是在一个集合（c）中（c在m中）；简单地说，它是一个使$c \in m$的集合（c）的并集］。

策梅罗的分离公理和弗兰克尔的替换公理均可推出来。

贝尔纳斯在陈述了一般集合论公理之后，就引进序数理论，而不是首先展开次序理论，这是他的系统的一个特点。他考察这样一些集合的总体：这个总体同康托尔所处理的序数系有同样的结构，而这些集合就等同于序数。有穷序数0, 1, 2，3, . . . …等同于集合0, {0}, {0, {0}}, {0, {0}, {0, {0}}}, ... ；序数ω等同于所有这些集合的并，如此等等。对于任何一对不同的序数，两者之一是另一个的元素，因此我们有序数的自然次序，每一序数都是在自然次序中位于它之前的所有序数的并。贝尔纳斯把上述处理在系统中加以形式化，给出了序数的严格定义。他把序数定义为：d是一个序数当且仅当d具有e传递性、连接性和良基性；所谓d有良基性是指d中总有一个关于e的最小元素y，y中没有d的元素了。这与罗宾逊的定义是等价的。

贝尔纳斯还推导出超穷归纳法原理，并把算术的递归定义的程序推广到所有序数。

贝尔纳斯的系统还有以下几条公理；

A_4（幂集公理），

A_5（选择公理），

A_6（无穷公理），

A.(基础公理)。

贝尔纳斯的系统经过哥德尔在1940年的改进，非逻辑公理分为以下五组：

A. 1. 类的外延性公理：

$$(\forall u)(u \in X \longleftrightarrow u \in Y) \to X = Y$$

这是说，两个类有同样元素则它们相等。

2. 每一集合是一个类。

3. 如果 $X \in Y$，则 X 是一个集合。

4. 无序对公理：

对任何集合 X 和 Y，存在一个集合 {X，Y}。

B. 概括公理：

$$(\forall X_1)\cdots(\forall X_n)(\exists Y)(Y = \{x: \varphi(x, X_1, \cdots, X_n)\})。$$

这实际上就是类的概括原则的形式表示。它是说，如果 $\varphi(x, X_1, \cdots, X_n)$ 是一个公式，则 $Y = \{x: \varphi(x, X_1, \cdots, X_n)\}$ 是一个类。类 Y 的元素是所有的满足 $\varphi(x, X_1, \cdots, X_n)$ 的集合 x：

$x \in Y$ 当且仅当 $\varphi(x, X_1, \cdots, X_n)$。

C. 1. 无穷公理。

2. 并集公理。

3. 幂集公理。

4. 替换公理(模式)。

D. 正则公理(基础公理或限制公理)。

E. 选择公理。

数理逻辑文献上常把 A-D 构成的系统记为 BG，BG 加选择公理记为 BGC。

冯·诺意曼——贝尔纳斯—— 哥德尔的公理集合论系统有不少优点。最主要的优点是同时引进“集合”和“类”两个初始对象，因此可以使用概括公理，这对于数学推导极为方便。另一个优点是可以较早地引进序数理论。在冯·诺意曼和贝尔纳斯的原系统中，没有公理模式，替换公理模式和分离公理模式可作为定理导出

来，因此是有穷可公理化的系统。这些都是与ZF（或ZFC）系统不同的地方。但是它们也有共同之处。BG系统虽然引进了“类”和类的公理，但是系统本身却可以排除集合论悖论，它禁止不是集合的类（真类）作为其他类的元素，如所有集合的类，所有序数的类等都是真类，不能再作为元素，从而从根本上铲除了悖论的根源。

现在关于两个系统之间的关系已取得以下一些结果：

1. 如果ZF系统是一致的，那么BG系统也是一致的。

2. BG系统中只涉及集合变元的每一定理也是ZF的定理。

从素朴集合论到公理集合论的发展过程深刻地说明了以下几个问题：

1. 集合论的创立决不是一蹴而就的，而是有深厚的基础的。在数学这门科学的实践中，长期以来存在着无穷集合的客观本性以及人们对它的认识之间的矛盾，认识并解决这个矛盾是建立集合论的主要基础。分析算术化的结果要求为自然数理论奠定一个数学基础，这是建立集合论的另一个前提。

2. 集合论悖论的出现——第三次数学危机是素朴集合论不精确的结果，这一危机是推动建立公理集合论的内在动力。

3. 公理集合论有不同的系统，但它们决不是孤立的，而是相互联系、相互制约、相互影响、相互补充的，它们在排除悖论、为数学提供基础的总目标下是统一的。

第三次数学危机是在数理逻辑发展史上的奠基时期产生的，是数理逻辑的一些重要分支得以创建的最伟大的动力。围绕着解决数学危机，在数理逻辑中产生了三大学派——逻辑主义学派、形式主义学派和直觉主义学派。在三大学派的一些代表人物中，有的是唯心主义哲学家，有的提倡唯心主义的哲学观点，但我们决不能因此就把这三大学派称为唯心主义的三大流派。三大学派的基本论点是关于数理逻辑和数学基础问题的，是具体的科学理论；在它们的具体科学理论指导下，它们还创建了数理逻辑中的崭新的

学科。对它们在数理逻辑和数学基础问题上的一些唯心主义观点必须进行科学的、实事求是的批判。但是，瑕不掩瑜，它们的功绩将永远彪炳于数理逻辑的史册。以下三章我们分别论述这三大学派。

第十一章　逻辑主义论题和逻辑类型论

逻辑主义的基本论点是，全部数学可以从逻辑得出，或者说，数学可以化归为逻辑，因此，数学只不过是逻辑的一个分支。

从数理逻辑发展史上来说，逻辑主义的基本论点可以追溯到莱布尼茨。他认为，所有数学的一般学说都是从逻辑原理中运用逻辑原理的推演。他把逻辑看成是一种普遍的科学，这种科学包括构成其他所有科学（包括数学）的基础的一些原则。德国数学家戴德金和逻辑学家弗雷格把算术化归为逻辑，取得了一定的成功。但是，明确地提出全部数学可以化归为逻辑、数学与逻辑等同的逻辑学家是罗素。

罗素说："在历史上数学和逻辑是两门完全不同的学科：数学与科学有关，逻辑与希腊文有关。但是二者在近代都有很大的发展：逻辑更数学化，数学更逻辑化，结果在二者之间完全不能划出一条界限；事实上二者也确是一门学科。它们的不同就象儿童与成人的不同。逻辑是数学的少年时代，数学是逻辑的成人时代。这种见解会触犯一些逻辑学家，这些人曾经消耗他们的时间于古典著作的研究，而不能从事一点点符号的推理；也会触犯一些数学家，他们已经学会了一种技术，但从不费心去研究它的意义和合理性。这两种人现在幸而都愈来愈少了。许多现代的数学研究显然是在逻辑的边缘上，许多现代的逻辑研究是符号的，形式的，以致对于每一个受过训练的研究者来说，逻辑和数学的非常密切的关系极其明显。二者等同的证明自然是一件很细致的工作：从普遍承认属于逻辑的前提出发，借助演绎达到显然也属于数学的结果，在这些结果中我们发现没有地方可以划一条明确的界线，使逻辑与数学分居左右两边。如果还有人不承认逻辑与数学等同，我们

要向他们挑战，请把他们在《数学原理》的一串定义和推演中指出哪一点他们认为是逻辑的终点，数学的起点。很显然，任何回答都将是随意的，毫无根据的。”①

下面我们来考察一下以罗素为代表的逻辑主义的主要工作。

第一节　数学概念和数学定理的推导

逻辑主义论题可分成两个部分：1. 数学概念可以通过显定义从逻辑概念推导出来；2. 数学定理可以通过纯逻辑推演从逻辑公理推导出来。

罗素在推导数学概念时所使用的逻辑概念有：命题联结词（否定，析取，合取，蕴涵）函项和量词（全称量词和存在量词）等词。在上述的逻辑概念中，有些是初始的，如否定，析取和全称量词，从所给出的逻辑概念足以定义一切数学概念。

弗雷格成功地用逻辑概念定义了自然数，罗素独立于弗雷格也获得相同的结果。这种方法的关键在于，自然数不是属于事物而是属于概念的逻辑属性。

其他种类的数——正数、负数、分数、实数和复数，不是用通常增加自然数的定义域的方法来完成的，而是通过构造一种全新的定义域来实现的。罗素在将数的概念向前推广时，认为自然数并不构成分数的子集，自然数3与分数3/1不是等同的，同样，分数1/2同与它相联系的实数也不是等同的。我们先看正负整数。罗素认为，+1与-1是关系，并且互为逆关系。+1是n+1对n的关系，-1是n对n+1的关系。一般地，如果m是任何归纳数，对于任何n而言，+m是n+m对n于的关系，-m是n对于n+m的关系。+m与m不是等同的，因为m不是一个关系，而是许多类的一个类。m/n定义为，当xn=ym时，二归纳数x，

①罗素：《数理哲学导论》第182页。

y 之间的一个关系。$m/1$ 是 x，y 在 $x = my$ 情形下所具有的关系。这个关系如同关系 $+m$ 一样决不能和归纳基数 m 等同，因为关系和一个类的类是完全不同的两个东西。罗素说，在实用上，只要我们了解分数 $1/1$ 和基数 1 并不相同，不必常常拘泥于这个区别。正负分数可以用类似于定义正负整数的方法而定义。实数的定义比较复杂一点。罗素发展了戴德金的实数论，作出了实数的定义。首先定义分数之间的大于或小于关系。给定二分数 m/n 和 p/q，假若 mq 小于 pn，我们就说 m/n 小于 p/q。这样定义的小于关系是序列关系，因而分数形成一个以大小为序的序列。有的实数即有理数以明显的方式与分数相对应；无理数，对应于分数序列的"间隙"，这是戴德金已证明了的。例如，把正分数分成两类：所有平方小于 2 的分数组成一类；其余的分数构成另一类。这种分法就形成分数序列的一个"分割"，它对应于无理数 $\sqrt{2}$。因为不存在其平方等于 2 的分数，所以第一类("下类"即较小的一类)不包含最大的元素，第二类("上类"即较大的一类)不包含最小的元素。因此，每一个实数都对应于分数序列的一个分割，分割中的"间隙"对应于无理数。

这样，罗素把实数定义为分数序列中相应分割的下类。例如，$\sqrt{2}$ 是其平方小于 2 的那些分数的类；$1/3$ 是所有小于 $1/3$ 的分数的类。由这些定义，整个实数算术都可以导出。这里，实数的定义是"构造的"。一个复数可以简单地看成是有先后次序的一对实数。

构造主义的方法是逻辑主义的一个重要部分。逻辑主义者用类似于定义实数的构造方法引进其余的数学概念。例如，分析中的收敛、极限、连续性、微分、微商和积分等概念，还有集合论中的超穷基数、序数等概念。

罗素的逻辑演算系统经过希尔伯特和阿克曼的改进，包含命题演算的四条公理和谓词演算的两条公理，推理规则是代入和分离。

罗素在推导数学的过程中发现，除逻辑公理外，还需要逻辑公理之外的一些特殊公理，即无穷公理和乘法公理（选择公理）。无穷公理是说，若n是任一个归纳基数，则至少有一个类有n个个体。由此可得出，有许多类有n个个体，而世界上个体的总数不是一个归纳数。因为，根据公理，至少有一个类有$n+1$个项，据此可得出：有许多类有n个项，并且n不是世界上个体的数目。既然n是任意一个归纳数，可知世界上个体的数目必定超过任何归纳数。无穷公理给我们保证：确有一些类有n个分子，于是我们才能断定n不等于$n+1$。没有这个公理，可能n和$n+1$都是空类。选择公理是说，对于不相交的非空集合所组成的每个集合，至少存在一个选择集合，也就是说，这个集合与每一个元素集合恰好具有一个共同元素。罗素举了一个生动的例子说明选择公理的必要性。我们知道$2 \times \aleph_0$ $\aleph_0$。因此我们可以假定$\aleph_0$个对子之和必有$\aleph_0$项。虽然我们可以证明有时确是这样的情形；但是除非我们假定了乘法(选择)公理,我们却不能证明永远是这样的情形。有个百万富翁当他买一双靴子时，同时总买一双袜子，如果他不买靴子，也决不买袜子，他有这样的一个脾气总是二者一齐买，最后他有$\aleph_0$双靴子，$\aleph_0$双袜子。问题是：他有多少只靴子，多少只袜子？人们会很自然地假定，他的靴子、袜子每样有多少双，每样就有加倍那么多只，因为$\aleph_0$二倍以后不会增加，所以他每样有$\aleph_0$只。问题在于，在靴子中我们可以分别左右，因此我们从每一对中能够选择出一只来，或者我们挑出所有的右靴，或者所有的左靴；可是袜子并没有这样一个选择的原则，除非我们假定选择公理，我们不能确定有任何一个选择类，它是从每一双袜子中挑出一只所构成的。

无穷公理和选择公理都是用存在语句加以陈述的。罗素把它们作为假定，而没有把它们作为逻辑公理，罗素这样做是正确的，因为逻辑公理的特点是，只研究可能的实体，不能作出关于某物是不是存在的论断。怎么解决这个困难呢？罗素认为，数学是一种

纯形式的科学，只能作出关于存在的条件语句：如果存在某些结构，那么也必定存在另一些结构，后者的存在性可以从前者的存在性合乎逻辑地推出。罗素把依赖无穷公理或选择公理的数学语句S变为"如果无穷公理真,则S"或"如果选择公理真,则S",这种条件语句可从辑逻公理推出。

在数学定理推导中最大的问题是，罗素假定了可化归性公理。这与逻辑类型论有密切联系。

第二节　逻辑类型论

为了解决悖论，实现逻辑主义的论题，罗素提出了逻辑类型论。

罗素最早提出类型论是在1903年出版的《数学的原则》一书中。在这本书中，专门有一章讨论悖论，提出用类型来区分类和类的元素。他说："如果一些项的汇集只能通过可变的命题函项来定义，那么，虽然作为多的类可被承认，但作为一的类必须被否定。……我们将说，作为一的类是同它的项有同样类型的一个对象；即任一命题函项 $\phi(x)$ 是有意义的，如果作为一的类代x时以一个项代x， $\phi(x)$ 也是有意义的。但是作为一的类并不总是存在的，作为多的类具有同该类的项不同的类型，……逻辑类型的区分是全部秘密的关键。"①这就排除了罗素悖论，因为所有不是自身分子的类组成的类具有与它的项不同的类型,说K∈K是无意义的。罗素还在《数学的原则》一书中写了一个附录《类型学说》，他说："每一命题函项 $\phi(x)$ 除了有真值域外，还有意义域，即如果 $\phi(x)$ 是一个真或假的命题，那么x必在此域中。这是类型论的第一点；第二点是，意义域构成类型，即如果x属于 $\phi(x)$ 的意义域，那么就有一个对象类（即x的类型），其中一切对象椒必属

① B. Russell, The Princrpies of Mathematics, 2nd ed. London, 1937, §104.

于$\phi(x)$的意义域，不管ϕ怎么变化；意义域或者是一个单个的类型，或者是一些类型的和。”①据此，罗素提出了个体、个体的类、个体的类的类等等类型的区分，也提出了关系、关系的关系、偶组成的关系、个体对于偶的关系等等类型。

由上可以看出，罗素在《数学的原则》一书中提出了类型论的基本思想——类型的定义即意义域，在此基础上提出了简单类型论。同时，罗素还考察了布拉里－福蒂悖论（最大序数的悖论），指出否定所有序数的集合都是良序的，就可解决这个悖论。罗素指出，他的类型论只是一个“尝试”，在它能回答所有困难之前，多半要转变为某种更精巧的形式。这表明，罗素还在继续探讨类型论和其他解决悖论的方法。

在1906年，罗素发表了一篇文章《论超穷数理论和序数理论的某些困难》，抛弃了类型论，提出了三种方案：1.曲折理论（或译为"之字形理论"），它是说，如果命题函项比较简单，它们可确定一个类，如果是复杂的，就不能确定，因为它们显示了一种曲折的性质，如x属于r当且仅当x不属于r。这是一种内涵理论，使类的存在依赖命题函项的内容。2.限制大小的理论，它是说，所有实体构成的类（全类）过于“巨大”，因而是不存在的；类的存在依赖于“不太大”的命题函项外延。例如，不存在一切序数构成的类，因此最大序数的悖论就可消除。3.无类理论，它是说，类不是真实的对象，而是逻辑的假定，类是一种形式符号。蒯因（W.V. Quine）的系统与曲折理论具有共同的特征。限制大小的理论与后来公理集合论的思路是一致的。罗素并没有采用第一种曲折理论和第二种限制大小的理论。按照哥德尔的说法，“罗素自己后来关于解决悖论的工作并没有照他自己指出来的上述两个方向去做，而在很大程度上是建立在更激进的想法即‘无类理论’之上的”。②这就是逻辑类型论。这一理论发展了1903的类型论思想，包含简单类型

①同上，§497。

②《数理哲学译文集》第166页。

论和分支类型论，写入1908年的论文《 以类型论为基础的数理逻辑》和1910—1913年的巨著《 数学原理》。

简单类型论同分支类型论是结合在一起的，但又独立于它，并与下文将说的恶性循环原则无关。上文说过，类型是一个意义域即一个给定的命题函项对之有值的变目集。简单类型论的中心思想是，把类或谓词分为不同的层。

第0层谓词：包括一切个体(个体常项或变项)，这些实体的类型记为0。

第1层谓词：取个体作为变目的谓词，包括个体的属性，个体之间的关系。前者的类型记为(0)，后者的类型记为(0, 0), (0, 0, 0)等等。

第2层谓词：其空位被个体或第1层谓词填补，并且至少出现一个第1层谓词作为变目。第2层谓词也根据它的空位的个数及种类而分成不同的类型。个体属性的属性，其类型记为((0)); 二元谓词(关系)的一个属性,其类型记为((0, 0)) ,等等。

第3层谓词、第4层谓词等等可类推。一个谓词如果其变目属于≤n层并且至少有一个变目是第n层的，它便属于第n+1层。第i层谓词能够有意义述说第j层谓词当且仅当i = j ＋ 1。第i不层谓词不能有意义地述说同层的谓词。在逻辑系统中引入简单类型论以后，罗素悖论等逻辑悖论就可以消除，因为这些悖论的发生是由于混淆了不同层的谓词所致。例如，在罗素悖论中，定义类的谓词记为 $\phi\hat{x}$，由它所定义的类记为“ $\hat{x}(\phi x)$ ”。根据简单类型论“ $\phi\{\hat{x}(\phi x)\}$ ”一定是无意义的，因为 $\hat{x}(\phi x)$ 是一个类，其层数高于它的定义谓词 $\phi\hat{x}$ 的变目的层数。因此,我们不能说“ 一个类是自身的元素 ”或“ 一个类不是自身的元素 ”,从而“ 由所有不是其自身元素的类组成的类 ” 是无意义的。

用简单类型论还不能消除说谎者悖论和理查德悖论，罗素为了处理这些悖论，引进了分支类型论。

分支类型论来自恶性循环原则。这个原则首先是彭加勒(Po

incare）根据理查德的思想提出来的。理查德在发现了他的悖论之后进一步说，实际上矛盾是不存在的，因为用有限字数可定义的小数集合完全不能理解为包含任何只涉及整个集合可定义的小数。彭加勒对此作作了推广，他认为这种定义包含恶性循环，应当禁止，他说明一些看来好象是定义的语句实际上并不定义什么，引起悖论的恶性循环具有特殊形式并且同企图把一个无穷集合当成一个完全的整体有联系。罗素接受了彭加勒的原则，进一步加以充实完善，他说：“一切悖论……都有一个共同特征，我们可称之为自我指称性或自返性。爱匹门尼德的话必定把自身包含在自己的范围之内。如果不是自身元素的所有的类是w的元素，那么这也必须应用于w；类似的关系悖论也如此。在名称和定义的情况下，悖论是由于把不可命名和不可定义性看成是名称和定义的成分。在布拉里－福蒂悖论的情况下，那个序列（其序数引起了困难）是所有序数的序列。在每一悖论中，对某种情况的所有情况有所论述，从所说的情况就产生出一种新的情况，它既与下述情况相同，又不相同：即在所说的情况中牵涉到所有的那些情况。但这是不合法总体的特征，……因此，我们的所有悖论都说明犯了恶性循环的谬误，所以，留下所要说明的就是，所牵涉的不合法总体可以用我们已经构造的类型分层来加以排除。”①他又说：“对于应该避免的那些悖论稍加分析，可知它们都是由于某种恶性循环而来。这种恶性循环起源于这样的假定：对象的一个汇集可以包含只能用作为一个整体的汇集加以定义的那些分子。例如，我们假定命题的汇集包含了一个断定‘所有命题或者是真的或者是假的’这样的命题。然而，这样一个陈述不能是合法的，除非‘所有命题，是指某一个已经确定的汇集；而如果那些关于‘所有命题，的陈述产生了新的命题的话，那么‘所有命题，指某一个已经确定的汇集这一点就不能做到。因此，我们必须说：关于‘所有命题，的陈述

① P. M· Vol. 1, pp. 61 — 62.

是无意义的。更一般地说，给定了对象的任一集合，如果当我们假定这个集合有一个总体，这个集合就要包含一些假定了这个总体的分子，那么这样的集合就不能有一个总体。当我们说一个集合‘没有总体’，我们的意思主要是指：我们不能对‘它的所有分子，作出一个有意义的陈述。正如上面的说明所表明的那样，命题必须是一个不具有总体的集合。我们不久就会明白，对于命题函项来说，即使这些命题函项能够有意义地以一个给定的对象作为变目，情形也是如此。在上述情形下，我们必须把一个集合分成一些较小的集合，而每一个较小的集合都能够有一个总体。这就是类型论所要做到的。”①

罗素接着陈述了恶性循环原则：“ 使我们能够避免不合法总体的那个原则，可以陈述如下：‘凡牵涉到一个汇集的全体者，它本身不能是该汇集的一分子’ 或者,反过来说,‘如果假定某一汇集有一个总体，它便将含有一些只能用这个总体来定义的分子，那么这个汇集就没有总体’。我们把上述原则叫做‘恶性循环原则’，因为它能使我们避免那些由假定不合法的总体而产生的恶性循环。……‘所有命题,,在它成为一个合法的总体之前,必须以某种方式加以限制，并且任何使它合法的限制，必须使关于总体的任何陈述不属于这个总体的范围之内。”②

在以上的恶性循环原则的几种表述中，罗素强调的是，总体不能包含只有通过这个总体来定义的分子。分支类型论就是在恶性循环原则的基础上对命题函项（广义的谓词）所作的一种分类，其核心是在类型中再区分出阶。为简化起见，我们限于考察个体的谓词这一类型。

个体是零阶函项。给定一个固定的论域（由个体 x, y, …组成的个体域）以及其中的一些函项（谓词）。ϕx, $\psi(x,y)$， $x(x, y, z\cdots)$ 这些公式称为母式，即不包含表面（约束）变元的公式、除个

① P. M Vol . 1, pp. 37 — 38 页 。
②同上。

体外没其他变目，不预设函项的任何一个总体。由这些母式可以得到x的其他函项，例如，

$(y)\cdot\psi(x,y)$，$(\exists y)\cdot\phi(x,y)$，$(y,z)\cdot\chi(x,y,z)$，$(y):(\exists z).\chi(x,y,z)$，等等。

所有这些函项都没有预设除个体的总体之外的总体。母式和这样的函项称为“一阶函项”。

在一阶函项的基础上便可构造二阶函项。把一阶函项当作一个新的域，加到原有的个体域上去，便得到一个扩大的论域。“$\phi!$”代表一个一阶函项变元。①“$\phi!x$”代表这样一个函项的任一值。我们可以看出，“$\phi!x$”是包含两个变元的函项，其一是$\phi!\hat{z}$，另一变元是x。“$(x).\phi!x$”是包含变元$\phi!\hat{z}$的一个函项。由于引进一阶函项变元，因而就有在新的论域上的一组母式。上面说过，$\phi!x$不包含约束变元，但包含两个自由变元$\phi!\hat{z}$和x。如果a是个体常项，那么$\phi!a$就是一个变元$\phi!\hat{z}$的一个函项。如果a和b是个体常项，那么，“$\phi!a$蕴涵$\psi!b$”就是两个变元$\phi!\hat{z}$和$\psi!\hat{z}$的一个函项，如此等等。因此，以下公式：

$$f(\phi!\hat{z}),\ g(\phi!\hat{z},\psi!\hat{z}),\ F(\phi!\hat{z},x),\cdots$$

就是只包含个体和一阶函项作为变目的母式，这些母式称为二阶母式（其中不必含有个体作为变目）。由以上母式可得以下函项：

$(\phi)\cdot g(\phi!\hat{z},\psi!\hat{z})$，它是$\psi!\hat{z}$的函项；

$(x)\cdot F(\phi!\hat{z},x)$，它是$\phi!\hat{z}$的函项；

$(\phi)\cdot F(\phi!\hat{z},x)$，它是$x$的函项。

二阶母式以及从二阶母式导出的量化公式称为二阶函项。也就是说，二阶函项包含一阶函项作为变元，也可包含个体变元，但不包含其他变元。

仿照以上方法可构成三阶函项。首先把二阶函项作为一个新的域，加到原有的论域（由一阶函项变元和个体变元组成）上去，

---

①“$\phi!\hat{x}$”中的$\hat{x}$是空位记号，$\phi!\hat{x}$即$\phi!()$。

形成一个新的论域（由二阶函项变元，一阶函项变元和个体变元组成）。三阶母式是这样一种函项，它的变目包含二阶函项，没有约束变元，除了个体、一阶函项和二阶函项外没有其他变目。由此可构成三阶函项。仿此，可构造更高阶的函项。与命题函项类似，我们可构成各阶的命题。

由上可见，如果在一个命题函项中出现的变元的最高阶数为 n，那么当有一个属于 n 阶的变元的量词出现时，该命题函项的阶数为 $n+1$。对于命题函项的阶数，还要看命题函项的变目，这时阶数必须高于所有变目的阶数。当确定一个命题函项的阶数时，还要考虑作为缩写用的记号的表达式中所出现的阶数，例如，$F(\phi!\hat{z}, x)$ 是一个缩写，表明这是 $\phi!z$ 和 x 的函项,因此该函项为二阶。

通过以上的分阶，我们可得两个结果：

1．我们可以把每个命题、性质或关系作为被断定的对象；

2．因为我们只允许依次构成的各个阶的命题函项，又因为对于某个阶的函项，它所涉及的对象总体是明确地限定于某一论域之中的,所以我们就能避免"所有命题"、"所有谓词"这种"不合法的总体"。

使用分支类型论，语义悖论便可消除。例如，说谎者悖论可以写成："我断定 p，而 p 是假的"。如果 p 是 n 阶命题，那么 p 在其中作为约束变元出现的命题"我断定 p，而 p 是假的"为 $n+1$ 阶，记为 q，q 比 p 高一个阶,它不能作为 p 的一个值进行代入,因此不会产生悖论。换句话说，如果 p 具有 n 阶的真或假，则 q 就具有 $n+1$ 阶的真和假。我们可以认为，"我在某一时刻所说的所有一阶命题都是假的"这句话是真的，而不会引起悖论，因为这句话本身是二阶命题。

分支类型论有许多弊端。按照分支类型论，我们不能说一切个体谓词如何，而要分成阶。对于实数，不能说所有实数如何，只能涉及具有确定的阶的实数。属于一阶的那些实数，在其定义中

不出现 对于所有实数'这种短语 属于二阶的那些实数,在其定义中只能出现 所有的一阶实数'这种短语 如此等等。这样一来,就失去了实数理论中的许多重要定义和定理。为了克服这种困难,罗素不得已增加了一条可化归性公理。在陈述这条公理前,先要解释一个概念:直谓的函项(谓词)。罗素给出以下两种定义:

1.只含常项,自由变元或空位的函项 即母式)为直谓的函项。

2. 含有 n 阶空位(即要填入 n 阶函项的空位)的 n+1 阶函项是直谓的函项。

定义 2 比定义 1 所包含的直谓函项较广。例如,二阶函项 $F(\phi!\hat{z}, x)$ 对定义 1 和 2 而言都是直谓函项,$(x).F(\phi!\hat{z}, x)$ 只对定义 2 而言才是直谓函项。但 $(\phi).F(\phi!\hat{z}, x)$ 是 x 的一个二阶函项,据定义,它是非直谓的,但 F 却是一个二阶的直谓函项。一般说来,一个 n 阶的非直谓函项是从 n 阶的直谓函项中将所有 n—1 阶的变目约束起来而得到的(其他变目也可约束起来)。

可化归性公理是说,一个非直谓的函项都有一个形式上等值的直谓函项(所谓形式等值就是它们对每一可能变目有同样的真值)。用符号表示为:

$$\vdash :(\exists\psi):\phi x \equiv_x \psi!x,$$

读为:对所有 x 来说,有一个函项 ψ 使得 φx 等值于 φ!x,这里 φx 是非直谓函项,ψ!x 是直谓函项。对两个变元的函项也可写出类似的公式。

有了这个公理之后,我们就可以用直谓函项替代非直谓函项。直谓函项的特点是:只要空位的阶确定了,整个函项的阶也就定了,因为 n+1 阶直谓函项必含有 n 阶空位。只根据空位划分类型 不再考虑常谓词、自由谓词变元和约束变元的阶),这是简单类型论的基本原则。因此可化归性公理的作用就是把分支类型论简化成简单类型论。如果有了这条公理,那么关于实数的阶的困难就可解决。我们可以说,关于实数的命题函项虽有不同的阶,但对每一个关于实数的高阶命题函项有一个相应的直谓函项,这一函

项为同样的有理数所满足而不为其他有理数所满足。同样，我们可以对由不同阶的命题函项所表达的一类事物作出单一的断定。

由于可化归性公理是一个人为的假定，不象一条自明的逻辑公理，因而遭到很多数学家和逻辑学家的反对，他们不愿采用分支类型论和可化归性公理，而采用简单类型论。罗素在1925年的《数学原理》第2版中放弃了可化归性公理，但仍采用分支类型论。他对这种情况感到失望，没有找到摆脱困境的出路。

1921年，波兰逻辑学家赫维斯泰克（L. Chwistek）首先提出废除可化归性公理，取消分支类型论而保留简单类型论。1925年，罗素的学生拉姆赛（Ramsey）在《数学原理》第2版出版之后不久,发表了一篇论文《数学基础》,1926年又发表了一篇论文《数理逻辑》。他的主要论点是,数学是纯外延性的,《数学原理》的麻烦是由于非法侵入了内涵的观点。他认为，命题函项是使命题和变元的值有相互关系的一种方法；而罗素则认为，函项的值因变元的不同的值而确定，变元由于语句内在的特性而有不同的值。拉姆赛抛弃了罗素对命题函项的内涵观点,而采用外延观点,把命题函项看成是实体对命题的一个完全任意的联合。拉姆赛使用对‘命题函项”的新解释，废除了可化归性公理。他成功地保留了《数学原理》的符号部分，几乎没有变动。拉姆赛提出的另一个重要论点是，悖论分为两组：A组（现在称为逻辑悖论或集合论悖论）和B组（语义悖论或认识论悖论）。A组悖论可用简单类型论来排除，B组悖论不能用逻辑符号表示，应归咎于日常语言的某种缺陷，在逻辑学和数学中不出现。拉姆赛宣布，分支类型论和可化归性公理在逻辑中是多余的，只可用于解决B组悖论。1937年，罗素表示同意拉姆赛的观点。

拉姆赛提出的另一个重要论点是，非直谓的定义（即涉及性质总体的定义）虽然包含着循环，但是这种循环是无害的，不是恶性的。他举了一个例子,“这个房间里那个个子最高的人”这句话是用某物自身所属的总体来描述某物的，但人们认为这句话是可以

接受的。这里所描述的人是已经存在的，并且被这句话唯一确定了，不是构造出来的。拉姆赛认为，性质的总体实质上是已经存在的。人的生命是有限的，我们不能把无限多个性质一一列举出来。但是我们可以仅仅根据所有性质的总体来描述其中的一些性质，这是与逻辑无关的经验事实。因此，拉姆赛允许非直谓的定义。

拉姆赛的论点一针见血地揭示了恶性循环原则的缺陷。恶性循环原则只能应用于我们自己所构造的实体，不能应用于独立于我们的构造而存在的对象。

逻辑主义学派的著名逻辑学家卡尔纳普(R. Carnap, 1891—1970)不同意拉姆赛的性质总体存在的观点，认为这是柏拉图的理念论观念。他提出了一种方案，既允许非直谓定义，达到既限于简单类型论又可能保留数学概念特别是实数理论中的概念的定义，但又避免陷入性质总体存在的绝对论观念。①卡尔纳普以"归纳的"这个性质的非直谓定义为例：

$$Ind(x) =_{df} (f)[(Her(f) . f(0)) \supset f(x)],$$

这个定义式读为：x是归纳的定义为对一切f而言，如果f是遗传的并且0是f，那么x是f。据分支类型论和恶性循环原则，这个定义是不允许的。根据上述定义，"数2是归纳的"表示为：

$$(f)[(Her(f) \cdot f(0)) \supset f(2)],$$

即凡是遗传的并且属于0的每一个性质也属于2。如果我们检验一个个别的性质,那就会发生循环,因为"归纳的"本身也是一个性质。确定某物是不是具有"归纳的"这个性质，原则上是不可能的，因此这个概念是无意义的。卡尔纳普指出，检验全称的逻辑语句或数学语句不是遍察一系列个别情况，因为非直谓定义通常涉及无穷总体。必须遍察一切个别情况这种信念混淆了"数学的普遍性("涉及已经给定的对象)和"种类的普遍性"。我们不是通过遍察个别情况来确立种类的普遍性，而是根据其他一些性质合乎逻

①见P. Benacerraf and H. Putnam (ed.), Philosophy of Mathematics (Selected Readings), Prentice-Hall, Inc., 1964, pp. 39-41.

辑地推出某些性质来确立种类的普遍性。在以上的例子中，“数$_2$是归纳的”表示“属于$_2$”的性质是根据“是遗传的并且属于零的”这个性质合乎逻辑地得出来的。首先，从“Her(f).f(0)”可得f(0)，即数$_0$是归纳的。然后根据“遗传的”定义：

$$Her(f)=_{df}(n)[f(n)\supset f(n+1)],$$

可以证明“f(0+1)”，和f(1)都可从“Her(f).f(0)”推导出来，从而证明数$_1$是归纳的。由此和以上定义，可从“Her(f).f(0)”推出“f(1+1)”和f(2)，从而证明了数$_2$是归纳的。

由上可以看出，非直谓的“归纳的”定义并不影响它的有效性。能够证明在个别情况下得到(或得不到)确定的性质，就说明这个定义是有意义的。卡尔纳普认为，取消了“数字的普遍性”，并清楚地阐明，完全证实一个关于任意性质的命题只是意味着这一命题对任意性质的逻辑有效性，在这样的情况下，非直谓定义在逻辑上是可接受的。

第三节 蒯因的新系统NF

当代著名的美国逻辑学家和哲学家蒯因(W Quine)对罗素的系统作了改进，在1937年的《数理逻辑的新基础》一文中提出了一个数理逻辑系统NF。[①]从NF，我们可以看到，蒯因是逻辑主义的继承者。NF的基本逻辑概念有3个：属于记为“e”；析否，记为“|”(“非……或非……”)全称量词。蒯因认为，在《数学原理》意义上的整个逻辑，因而整个数学，都能翻译成由无穷多个变元“x”、“y”、“z”、“x”等等以及由这三种形式的记号的复合所构成的语言。变元包括个体，类和类的类等。“(x ε y)”的意思是：x属于y，即x是y的一个分子。“(φ | φ)”是说，既非φ又非φ，或者说，非φ或非ψ。全称量词记为“(x)”；“(x)(x ε y)”意为“每一事

①蒯因：《从逻辑的观点看》，江天骥、陈启伟等译，上海译文出版社1987年版，第74—93页。NF是“新基础”的缩写。

物都是 y 的分子”。NF的公式可以递归地描述如下：如果将“α ε β”中的“α和“β”代以任一变元，其结果是一个公式；如果将“(φ| φ)”中的 φ”，和“φ”代以任一公式，其结果是一个公式；如果将(α)φ”中的 α”代以变元而 φ”代以公式，其结果是一个公式。这样描述的公式都是NF语言的公式。

蒯因接着给出15个定义。

第一个定义引进否定记号：

定义1. ～φ定义为(φ| φ)。

第2个定义引进合取：

定义2. (φ. φ)定义为～(φ| φ)。

第3个定义引进实质蕴涵：

定义3. (φ ⊃ψ) 定义为(φ| ～ψ)。

第4个定义引进析取：

定义4. (φ∨ φ)定义为(～φ ⊃ψ)。

第5个定义引进等值：

定义5. (φ ≡ ψ) 定义为((φ| ψ)|(φ ∨ ψ))。

第6个定义引进存在量词：

定义6. (∃α) φ定义为～(α) ～φ。

第7个定义引进包含：

定义7. (α ⊂β) 定义为(γ)(γεα)⊃(γ ε β))。

第8个定义引进等词：

定义8. (α = β) 定义为(γ)((α e γ)}(β e γ))。

第9和第10个定义引进摹状词：

定义9. ((ɿα)φ ε β)定义为(∃γ)((γ ε β)(α)((α = γ)≡ φ))。

定义10. (β ε(ɿα)φ) 定义为(∃γ)((β ε γ).(α)((α =γ) ≡ φ))。

第11个定义引进抽象运算：

给定一个对x所要求的条件“—”，凭借这种运算可以构成类x̂——，其分子正好是满足该条件的那些对象x。算子“x̂”读为“使得—的所有对象x的类”，。类x̂可用摹状词定义为：任一对

象x当且仅当一成立才属于的那个类；用符号表示为：

定义 11. $\hat{\alpha}\phi$ 定义为(,β)(α)((α ε β) ≡ φ)。

通过抽象运算，负类一x可定义为 $\hat{y}$ ～(y ε x)，并类 x∪y)定义为 $\hat{z}$((z ε x) ∨(zey))，全类V是 $\hat{x}$(x = x)，空类Λ是一V。其唯一分子是x的单元类{x}可定义为：

定义12. {α}定义为 $\hat{\beta}(\beta = \alpha)$

以下是其仅有的分子是x和y的类{x, y}的定义：

定义13. {α，β}定义为$\hat{\gamma}$((r = α) ∨(γ = β))。

定义14是关于序偶($\alpha;\beta$)的定义：

定义14. (α; β)定义为{{α}, {α, β}}。

关系是序偶的类，"$\hat{x}\hat{y}$———"表示关系，定义为所有使得一成立的那些序偶(x; y)的类；用符号表示为：

定义15. $\hat{\alpha}$ βφ定义为 (∃α)(∃β)((γ = (α; β). φ)。

在15个定义之后，蒯因提出了一条公设(外延性原理)：((x ⊂ y) ⊃((y ⊂x) ⊃(x= y)))。这是说，x包含于y并且y包含于x，则x等于y。根据这个原理，一个类由它的分子决定。

5条规则如下。

规则1.((φ|(φ|x))|((ω⊃ω)|((ω|φ)⊃(φ|ω))))是一条定理。

规则2. 如果ψ与φ相似，只是α在φ中作为自由变元出现的地方，在ψ中都有β作为自由变元出现，那么((α)φ⊃ψ)是一条定理。

规则3. 如果" x "不在φ中出现，那么(∃x)(y)((y ε x) ≡φ)是一条定理。

以上3条规则规定了一组作为初始定理的公式，实质上相当于公理，应用于所有公式 φ ψ, x和ω以及所有变元α和β。

以下两条规则规定推理相联系的规则，相当于公理系统中的变形规则：

规则4. 如果φ和(φ|(φ|x))都是定理，则x是定理。

规则$_5$．如果（$\phi \supset \psi$）是定理，而α不是φ的自由变元，则（φ ⊃ (α) ψ）是定理。

规则$_1$和规则$_4$是关于命题演算的。规则$_2$和$_5$是处理量词的。规则$_1$、$_2$、$_4$和$_5$所得出的定理就是命题演算和谓词演算的有效公式。

规则$_3$称为抽象原理，它保证：给定y所满足的条件"—"，都存在一个类 $\hat{y}$———，其分子正好是使得—成立的那些对象$_y$。但是如果不加限制，规则$_3$会引起罗素悖论。由规则$_3$可得：

$$(\exists x)(y)((y \varepsilon x) \equiv \sim(y \varepsilon y))。$$

把y取为$_x$，通过使用系统中规则可得：

$$(\exists x)((x \varepsilon x) \equiv \sim(x \varepsilon x))。$$

这就是罗素悖论。为避免罗素悖论，蒯因在系统中引进简单类型论的规则：（α ε β）只有当β的值与α的值相比较属于下一较高层次类型时才是一个公式，否则（α ε β）是无意义的。在NF系统中的一个公式，如果有可能把其中的各个变元换成数字使得"ε"只出现在具有"$_n \varepsilon _{n+1}$"形式的表达式中，那么这样的公式就被称为分层的。例如，"$_x \varepsilon _y$"是分层的，而"$_x \varepsilon _x$"不是分层的。在NF中引入简单类型论的结果是，除掉了所有不分层的公式，因此规则$_{1-5}$中的φ，ψ等被理解为分层的公式，并加上一个统一的假设：要作为定理推出的表达式都同样是分层的。这样就避免了罗素悖论和其他有关悖论。

但是，蒯因认为，简单类型论也带来一些不自然和不方便的后果。他说："由于此理论只许一个类含有属于统一类型的分子，因此全类V就让位于无穷长的一系列拟全类，每个类型有一个。负类—$_x$不再包括所有不属于$_x$的对象，而是变成只包括不属于$_x$的而且其类型较$_x$低一层的那些对象。甚至零类Λ也让位于无穷长的一系列零类。布尔的类代数不再适用于一般的类了，而是要每一类型中复制。关系演算也如此。甚至算术，当它是以逻辑为基础通过定义引进时，也证明须经这同样的多重化。此时数也不

再是唯一的；正如就V和 ∧所说的那样，对于每一类型都有一个新的0，都有一个新的1，等等。所有这些分裂和重复不仅直观上很讨厌，而且它不断地要求进行或多或少精细的技术处理来恢复被割断了的联系。”①接着，蒯因对简单类型论作了改进。简单类型论是通过从语言中排除全部不分层的公式来避免悖论的，蒯因现在在NF系统中默认不分层的公式而只是明确地把规则3限制为分层的公式，这样也可达到同样的避免悖论的目的。在采用这种方法时，抛弃了类型的分层，并且把变元看成是其值域无限制的东西。这样就不必接受类型论及其所引起的令人难堪的后果。“分层的公式”这一概念只采取把变元代以数字的说法来说明，不具有类型的涵义。规则3变为较弱的规则3′：

规则3′．如果φ是分层的而且不包含“x”，则 $(\exists x)(y)((y\varepsilon x)\equiv\phi)$。

这个新系统有许多优点。它恰好有一个一般的布尔类代数；补类-x包括不属于x的每个对象；空类∧是唯一的；全类V也是唯一的，每个对象，包括V自身，都属于它。关系演算重新表现为处理无所限制的关系的单一演算。数也恢复了它们的唯一性，而算术也成为单一的演算。总之，蒯因成功地取消了简单类型论。不但如此，NF系统的推演能力还超过《数学原理》(PM)的推演能力，还取消PM的无穷公理，因为NF无需此公理即可得到有无穷多分子构成的类，即全类V，它的存在由规则3′保证；V的无穷多的分子，即∧，{∧}，等等的存在也由规则3′保证。

总之，NF系统不但不用分支类型论和可化归性公理，而且也不用简单类型论，克服了PM系统的根本缺陷。另一方面，它具有较强的推演能力，并且十分简化，无需无穷公理。NF系统是PM系统的改进和发展，是逻辑主义的一个重要成果。我们应注意的是，NF的目的是‘说明《数学原理》的逻辑的一系列主要概念可以

①前引《从逻辑的观点看》第85页。

怎样从眼下的初始词构造出来，从而摆明《 数学原理》的可翻译性。至于进一步构造数学概念，则可委诸《 数学原理》了。 ”①NF没有做构造数学概念的工作,这一功绩属于《 数学原理》。

哥德尔认为，蒯因的NF系统‘ 和罗素的之字形理论有某些共同的本质特点。不仅如此，沿着这些线索好象存在着令人感兴趣的可能性。 ”②这是对NF系统的科学评价。

第四节　逻辑主义的历史地位

以罗素为代表的逻辑主义在数理逻辑发展史上具有重要的历史地位。怀特海和罗素的巨著《 数学原理》是数理逻辑发展史上一个里程碑，是数理逻辑的经典著作，起了承先启后、继往开来的伟大作用。

关于逻辑主义的论题，即逻辑与数学等同，我们在上面作了详细论述。要从逻辑主义者所说的纯逻辑推出全部数学，遇到了极大的困难。首先，必须要引进两条非逻辑公理，无穷公理和乘法公理（ 选择公理）。无穷公理是对于客观世界的断定，承认宇宙间个体的个数是无穷的，没有这条公理，连最简单的自然数也无法构成。乘法公理是与无穷有关的断定，是与数量有关的假定，即保证选择类存在的假定，它不是逻辑的规律。罗素深知这一点，所以，他把这两条公理写在需要它们的各数学定理的条件里面，作为假定。但是这种解决办法并不能真正解决问题，在数学中必须承认有无穷多个自然数，而不是只承认条件语句‘ 如果有无穷多个个体，那么自然数存在 ”。如果一个系统推不出无穷公理，推不出自然数的存在,那么它肯定不能推出数学。其次,《 数学原理》系统是以类型论为基础的，在从逻辑推导数学的过程中，已暴露出恶性循环原则、分支类型论和可化归性公理的缺陷。实际上，数学不是建

①《 从逻辑的观点看》第76页。

②《 数理哲学译文集》第166页。

立在逻辑的基础之上，而是建立在罗素的分支类型论的基础之上，而没有可化归性公理的分支类型论并不能推出全部数学，上文已经说过，这里不再赘述。蒯因的NF系统是公理集合论的形式，而不是类型论的形式。实际上，蒯因并没有把数学化归为纯逻辑，而是化归为包含集合论在内的逻辑系统。把数学化归为公理集合论，比起化归为PM系统具有结构简单的优点。但是，纯逻辑（逻辑演算）和公理集合论虽然都属于广义的数理逻辑，但它们毕竟是两门分支学科，集合论就其性质而言属于数学。弗雷格就曾经指出，集合论及其中的概念，并不是通常的逻辑概念，也不能还原于逻辑概念。蒯因在1970年改变了原来的观点，也认为集合论是一种数学理论。蒯因的NF系统也未能实现逻辑主义原来想要达到的目标。

逻辑主义的论题虽然没有实现，但它在数理逻辑发展史上具有重要意义。罗素关于数学与逻辑关系的逻辑主义论题并不是象有人简单批判的一种唯心主义哲学，而是具体的数学假说或猜想。逻辑主义论题应当说成是关于数学的逻辑主义猜想。罗素是一位科学家，以实事求是的精神对这一猜想进行了探索。他从纯逻辑演算出发，增加了两条非逻辑公理，以分支类型论为基础，推导出一般算术和集合论，推导出代数和分析的主要概念。罗素的实践向我们表明，逻辑与数学有紧密的联系。虽然从纯逻辑不能推出全部数学，但是数学要依赖逻辑，在构成数学系统时，逻辑具有优先性，它可以决定一个特殊的数学系统的推理过程。从这一方面来说，罗素的逻辑主义猜想并没有完全失败，它得到了部分的成功，为弄清数学与逻辑的关系提供了重要的资料。这是逻辑主义的重要贡献。此外，分支类型论虽不适用于数学，但可用于解决语义悖论，为后来解决语义悖论的新方案提供了理论前提。简单类型论虽有一定缺点，但仍不失为一种科学理论，现在仍然被广泛应用于逻辑和数学的研究之中。蒯因的新系统NF，向人们展示了一个逻辑主义的公理集合论系统，对集合论的发展具有重要意义。

马克思主义给予科学假说或猜想以很高评价。恩格斯曾经指

出“：只要自然科学在思维着，它的发展形式就是假说。一个新的事实被观察到了，它使得过去用来说明和它同类的事实的方式不中用了。从这一瞬间起，就需要新的说明方式了——它最初仅仅以有限数量的事实和观察为基础。进一步的观察材料会使这些假说纯化，取消一些，修正一些，直到最后纯粹地构成定律。如果要等待构成定律的材料纯粹化起来，那末这就是在此以前要把运用思维的研究停下来，而定律也就永远不会出现。”①我们对逻辑主义应当根据恩格斯的论述来进行评价。逻辑主义论题是一个科学假说，数理逻辑的发展使这一科学假说“纯化”，对它作了“修正”，直到最后纯粹地构成了关于逻辑与数学关系的“定律”。一方面，逻辑与数学有重大区别，从纯逻辑不能推出数学。哥德尔在1931年证明了象《数学原理》那样的包含自然数算术的形式系统是不完全的，这就说明，逻辑主义论题在形式算术系统内无法成立。当然对其他数学系统也无法成立。由此可见，罗素的研究为哥德尔不完全性定理的建立创造了前提。另一方面，逻辑主义所取得的成果揭示了逻辑与数学的密切关系，纯逻辑（即一阶逻辑演算）是各门数学形式化的逻辑基础。总之，我们认为逻辑主义学派的工作在数理逻辑发展史上有重要贡献。著名数理逻辑学家丘吉（Church）在1962年的论文《数学与逻辑》中指出，即使有几种反对意见，那也不能因此就说逻辑主义是毫无成果的。仍然有两件重要的东西。其一是把数学的语汇归约到一组极其简单的原始概念，它们全都属于纯逻辑的语汇。另一是把全部现有的数学建基于一个相当简单齐一的公理和推理规则系统之一。数学的原始基础的这样一种归约，确实可以用别的方式来做，如果人们不是唯一地信奉逻辑主义的学说的话；但是，这毕竟是逻辑主义者最先做出的一个成就。”②

上文说过，逻辑主义论题本身不是一种唯心主义学说，它是关

①《马克思恩格斯选集》，第3卷，人民出版社1972年版，第561页。

②《数理哲学译文集》第59页。

于数学基础的一种猜想。但是，罗素是一个唯心主义者，他对逻辑的解释是唯心主义的。罗素说："一个逻辑的前提必须具有确定的特性，而这种特性可以定义如下：它必须具有这样一种意义下的完全普遍性，即它并不提及任何特殊的事物或性质；而且，它是由于其形式而必然为真的。……显然，当我们在说逻辑命题由于其形式而为真时，它所表明的正是逻辑的基本特性。"①罗素在这里把在逻辑系统中逻辑命题的形式有效性说成是逻辑命题的真理性标准，完全否定了逻辑形式是客观世界的科学抽象，完全割裂了形式与内容的联系。与此相联系，罗素又说："逻辑命题是可以先验地认识的，不须对于实际世界作一番研究。只有从经验事实的研究中，我们才知道苏格拉底是一个人，但是我们知道三段论式在它的抽象形式中（即当它用变元陈述出来时）的正确性，而无须诉之于经验。"②我们承认，三段论式在形式上是正确的，但是这种形式正确性的来源不在形式本身，而在客观世界。列宁说："人的实践活动必须亿万次地使人的意识去重复各种不同的逻辑的格，以便这些格能够获得公理的意义。"③罗素恰恰颠倒了这种关系。他在处理摹状词、类和关系的符号时，提出了"不完全的符号"的理论，把它们作为"使用中的定义"，这本来是一种逻辑本身的技巧，但是罗素对此作了唯心主义的哲学结论。他说："类的符号只是方便，并不代表称作'类'的对象，而且类事实上象摹状词一样是逻辑的虚构，或者用我们的话说'不完全的符号'。"④"在我们的系统中，表示类的符号和表示摹状词的符号一样，是不完全的符号：通过定义来使用它们，而它们自己则根本没有被假定为代表任何东西。……因此，就我们引进它们而言，类仅仅是一种符号的或语言的约定，

---

①Princrples of Mathematics, p. xii.
②《数理哲学导论》第191页。
③列宁《哲学笔记》,人民出版社1961年版，第203页。
④《数理哲学导论》第170页。

而不是真正的对象”。①基数已被定义为类的类，因此它们也就成为‘仅仅是符号的或语言的约定”。按照这种唯心主义的约定论，摹状词、类、基数等等都是逻辑的虚构，没有客观基础，最后只剩下一个．‘实在世界”，即幻想、思想和情绪’的实在世界”，感觉材料”组成的世界。总之，罗素关于逻辑的唯心主义观点是完全错误的，我们应当根据马克思主义观点对之进行批判。但是，我们决不能把婴儿与脏水一起泼掉，决不能把逻辑主义与唯心主义划等号。逻辑主义的基本部分是逻辑主义论题，这是一个科学假说或猜想，在数理逻辑发展史上具有重大作用；当然，逻辑主义还有其一部分哲学唯心主义的糟粕，这是应当进行批判的。

① P. M. Vol. 1, pp. 71-72.

第十二章　直觉主义的数学基础和逻辑

为了对付第三次数学危机，与逻辑主义学派同时出现的还有形式主义学派和直觉主义学派。本章论述直觉主义的数学基础和逻辑，下章论述形式主义学派的形式公理学和证明论。

直觉主义学派的创始人是著名的荷兰数学家布劳维尔(L. E. J. Brouwer, 1881-1966)。他在1897年进入阿姆斯特丹大学学习，1907年获博士学位。1909年担任该校讲师，1912年任副教授，1913年任教授，1951年退休。

布劳维尔的重大贡献是，为直觉主义数学和逻辑奠定了基础，同时开创了现代拓扑学的研究方向。他的主要的拓扑学著作产生于1909-1913年之间，他证明了维数的拓扑不变性，对拓扑学作出了重要贡献。从1918年到整个20年代，他发展了直觉主义数学，并且对古典数学作了详尽的评判。他还提出了可作连续统理论基础的直觉主义集合论。他的著作被收集在《布劳维尔全集》中。

布劳维尔有比较系统的直觉主义哲学理论，他承认他的哲学观点来源于康德的先验主义。对于直觉主义的哲学观点，我们必须批判。但是，直觉主义学派所建立的直觉主义数学和直觉主义逻辑不属于直觉主义哲学理论，这是两种具体的科学理论：直觉主义数学是一种构造性数学，直觉主义逻辑是一种构造性逻辑。这是我们应当注意的。

直觉主义学派的主要成员有海丁(Heyting)，魏尔(Weyl)等。

为了更好地了解直觉主义学派，我们首先分析一下他们的哲学。

第一节　直觉主义的数学哲学

康德的先验主义是直觉主义数学哲学的理论基础。康德认为，感性直觉有两个纯形式，它们是先天知识的原则，这两个纯形式就是空间和时间。空间是外直觉的纯形式，而时间是内直觉的纯形式。空间不是一个从外部经验得来的经验概念；空间是一个必然的、先天的观念，它是一切外部直觉的基础；空间不是一个关于一般事物的关系的推论概念，或者说一般的概念，而是一个纯直觉；空间被表象为一个无限的所与的量。时间不是从任何经验得来的经验概念；时间是作为一切直觉基础的必然的观念；那些关于时间关系的必然原则或关于一般时间的公理，它们的可能性也是以这个先天的必然性为根据。时间是感性直觉的一个纯形式；时间的无限性的意义，不过是说，每一定量的时间之所以可能，仅只是由于把作为其基础的那个唯一的时间加以限制。时间与空间是知识的两个来源，从它们能够得到不少先天综合知识。特别是纯数学关于空间及其各样关系的知识就是一个光辉的范例。时间与空间，合起来，就是一切感性直觉的纯粹形式，而因此就使先天综合命题成为可能的①。康德所说的综合命题是指宾语与主语虽有联系但却在主语以外的一种命题。一切数学命题都是先天综合命题。例如"两点间的直线是最短的",这就是一个综合命题"最短的'这概念不能通过任何分析过程把它从直线概念里引申出来；所以要借助直觉的帮助，才能得到综合。再如，7＋5=12，这也是一个综合命题；7与5之和的概念只包含着两个数目之联合为一个数目，而在这里面并未想到联合两个数目的单个数目是什么；从7这个数目开始，用在直觉中给与了的5（如我们的五指），一个单位一个单位地加到7的概念上，由于手的形状的帮助，就看见这个数目

①见《十八世纪末—十九世纪初德国哲学》，商务印书馆1960年版，第17-29页。

出现了。按照康德的说法，人们所以感知现象彼此“并列”和“前后”相随等等，完全由于人们意识中具有把知觉在主观的空间和时间形式中排列起来、系统化起来的先天的能力。康德的时空观、数学观是彻头彻尾的主观唯心主义的先验论，他完全否认了时空的客观性、物质性，否定了数学知识来源于实践。他认为数学对象的存在条件是由理智提供的，所以数学结论具有普遍性和必然性；欧氏几何具有绝对的普遍性和必然性。如此等等。

布劳维尔继承了康德的理论，作了修改和补充，形成了一套直觉主义的数学哲学。布劳维尔同康德一样，认为数学定理是先天综合真理。他于1912年在阿姆斯特丹大学的就任辞（题为《直觉主义和形式主义》）中承认，非欧几何的发展已推翻了康德的空间观点，但是他接着说道：“尽管似在数学发展的这一时期之后，减弱了直觉主义的地位，但它由于放弃了康德的空间先验性而更加坚决地坚持时间的先验性，因而得到了复苏。这种新直觉主义认为，某一生活瞬间分解成质上不同的部分，只有在这些部分仍被时间分开之时，它们才合而为一，这是人类理智的根本现象，是通过抽象从它的感情内容过渡到数学思维的根本现象，即赤裸裸的二——一性直觉。这种二——一性直觉,即数学的基本直觉,不仅创造了数1和2，而且创造了一切有穷序数，因为二——一性元素之一可以看成是一个新的二——一性,它可以不定地重复进行 这就进一步产生了最小的无穷序数ω。最后，这个基本的数学直觉（在其中,联结的和分离的,连续的和不连续的被结合起来)立即产生了线性连续统的直觉,即‘在…之间’的直觉,它通过插入新单位数也是不可穷尽的，所以它决不能被看成是一个单纯的单位数集合。”①布劳维尔修改了康德的先验时空学说,取消了‘外直觉的纯形式’的空间概念,把数学的基本直觉建立在‘内直觉的纯形式’的时间概念的基础之上，这种直觉被称为“二一性直觉”。按照布

①Philosophy of Mathematics (Edited by P. Benacerraf and H. Putnam), Prentice-Hall, INC. 1964, p. 69。

劳维尔的看法，当时间进程所造成的二 •一性本体，从所有的特殊显象中抽象出来的时候，就产生了数学。所有这些二 •一性的抽象形式，即 n 到 n + 1的关系，就是数学的基本直觉，由无限反复而造成新的数学对象。从〈1, 2〉出发,根据二 一性直觉,可一步一步地产生出〈2,3〉,〈3,4〉等等合二为一的直觉，这样，自然数序列就产生出来了。由此，也产生了线性连续统的直觉，因为人们随时都能设想在两个已知元素之间插入新元素。几何也依赖同样的直觉，布劳维尔说：“ 这样，时间的先验性不仅规定作为先天综合判断的算术的特性，而且对几何的特性亦然，并且不仅对初等的二维和三维几何如此，而且对非欧几何和n维几何也如此。因为自笛卡儿以来，我们已经知道如何用坐标运算将所有这些几何化归为算术。”①由上所说，布劳维尔的直觉主义哲学的出发点是康德的先验主义，这是彻头彻尾的主观唯心主义。这是直觉主义哲学的第一个特点。

现在我们来看一看它的第二个特点。布劳维尔只承认自然数集合和可数集合，不承认其他无穷集合的存在，只承认最小的超穷基数，不承认其他更大的超穷基数的存在。布劳维尔认为，“ $_0$和$_1$之间所有实数的集合”是毫无意义的。这里涉及关于无穷理论的本质问题。在数学中有两种无穷理论：实无穷论和潜无穷论（参看第十三章第二节)。实无穷论认为,无穷是现实的、完成了的,无穷集是一个完备的、存在的总体，与人类产生它或构造它的过程无关 潜无穷论认为,无穷只是当成潜在的、可能的、被产生的或构造的。本来，这两种无穷理论属于具体的数学理论，在客观世界都有其基础，从不同侧面反映了无限的物质世界，它们是对立统一的，互补的。数学家在建立数学理论时，可以采用不同的无穷理论。如果否定无穷理论的客观基础，那就是唯心主义的哲学观点。布劳维尔的直觉主义数学是以潜无穷论为基础的，这属于数学的范围。但是，布劳维尔根本否定两种无穷理论的客观基础。他认为，自然

①同上，pp. 69—70。

数集合、可数集合、最小的超穷基数等是由先验的基本直觉即二一性直觉产生的，这样，他就把潜无穷的客观基础化为乌有，而把它归结为心灵的构造和先验的对时间的初始直觉。与否定潜无穷的客观基础的同时，他还否定了实无穷的客观基础，因为实无穷不能通过二·一性直觉和心灵的构造而产生出来。本来，数学中的构造主义不属于哲学，但是布劳维尔却赋予"构造"这个概念以哲学涵义，他认为直觉是人心对于它所构造的东西的清晰理解，他把"构造"同直觉和人心联在一起。这样，他就对"构造"作了主观唯心主义的解释。

直觉主义学派的主要成员海丁说。"直觉主义的数学在于……心灵的构造；一个数学定理表现为一个纯粹经验的事实，即某种构造的成功。'2+2=3+1'必须要看成是下面这个陈述的缩写：'我完成了用'2+2'和'3+1'所表示的心灵构造，并且我发现了它们导致同样的结果。'"，①这就是说，数学对象的存在就是被心灵构造出来。

综上所说，直觉主义的数学哲学从"内直觉的纯形式"的时间概念出发，以先验的"二一性直觉"作为初始直觉，创造了一切数学对象，它把数学归结为"心灵的构造"，并以此为标准，完全否定了潜无穷和实无穷的客观性。直觉主义学派所宣扬的这些哲学观点是极其错误的，我们必须用马克思主义哲学观点对它们进行彻底的批判。在批判时，要注意区别直觉主义理论中的哲学观点同具体的、科学的数学和逻辑观点，不要把婴儿和脏水一起泼掉。

第二节　直觉主义的数学基础

直觉主义数学是布劳维尔等人在批评古典数学时所建立的，它的内容不属于直觉主义哲学。

---

① Heyting, A. Insuitionism An Introduction. Amsterdam, 1956, p. 8。

最早发表直觉主义数学观点的学者是克朗尼克。他在19世纪70年代和80年代就提出了他对数学的看法。他认为，魏尔斯特拉斯的严密性含有不能接受的概念，而康托尔关于超穷数和集合论的工作不是数学而是神秘主义。他把整数作为定义其他数的基础,他的名言是“:上帝创造了整数,其他一切都是人造的”。他认为，数学的很多部分没有给出构造方法或判断准则，以便在有穷步骤内去确定它们所研究的对象。他严厉批评魏尔斯特拉斯、戴德金、康托尔等人的基本定义，说他们的定义只是一些空话，因为他们并不能够使人们可以决定一个给定的客体是否满足该定义。他根本否定无理数的存在。上文说过，他的数学理论对康托尔集合论的传播起了阻碍作用。他并没有提出明显的直觉主义哲学观点,把他说成是直觉主义哲学的前躯,是不正确的 我们应当说,他是直觉主义数学的前驱。

法国数学家彭加勒在20世纪初发表了一系列关于数学基础问题的看法。他主张潜无穷论，认为数学归纳法是一种直观的思维方法，是对于无穷递进可能性的认识。他认为，非直谓定义和悖论都来源于对实无穷的肯定，明确提出“ 没有实无穷 ”的主张。与克朗尼克一样，他坚持所有的定义和证明都必须是构造性的。他反对不能用有限个词来定义的概念，例如，按选择公理选出来的一个集合，如果是从超穷数个的集合中的每一个都需要作选取的话，那它就不是真正被定义了的。

提出直觉主义数学观点还有法国数学家包瑞尔(Borel)等人。

以上的观点是不系统的。真正奠定直觉主义数学基础的学者是直觉主义学派的创始人布劳维尔和他的学生海丁等入。

下面我们谈谈直觉主义数学基础的几个原则。

一、潜无穷论是直觉主义数学的出发点

直觉主义数学家认为，实无穷论是逻辑和数学悖论的根源，必

须抛弃它；数学应当以潜无穷论为基础。

魏尔说："我想毫无疑问的，布劳维尔弄清楚了下面这一点，没有任何明证再支持下列的信仰：把所有自然数的全体当作是具有存在的特性的，…。自然数列既已超出由一数而跳到下一数这步骤所达到的任何阶段，它便有进到无穷的许多可能；但它永远留在创造的形态中，绝不是一个自身存在的封闭领域。我们盲目地把前者变成后者，这是我们的困难的根源，悖论的根源地也在这里——这个根源比之罗素的恶性循环原则所指出的具有更根本的性质。布劳维尔打开了我们的眼睛并使我们看见了，由于相信了超出一切人类的真实可行的'绝对'之故，以致古典数学已经远远地不再是有真实意义的陈述句以及不再是建基于明证之上的真理了。"①

直觉主义学派把从潜无穷论中引伸出来的自然数论作为其他数学理论的基础。海丁认为，这有三点理由：②

1. 它为任何具有极低教育水平的人很容易理解；
2. 它在计算过程中是普遍可应用的；
3. 它是构造分析学的基础。

我们认为，直觉主.义数学家把潜无穷论及建基于其上的自然数论作为整个数学的基础，从而建立了一种不同于古典数学的新数学理论，这是一种科学研究，与直觉主义哲学是根本不同的。布劳维尔、海丁等人硬给他们所创建的数学以唯心主义的直觉主义哲学解释，这是完全错误的。

二、在数学中不能普遍使用排中律

古典数学大量使用排中律，这是古典数学的一个特点。早在1908年，布劳维尔发表了一篇论文，题为《论逻辑原理的不可靠

---

①魏尔：《数学和逻辑》，转引自克林：《元数学导论》(科学出版社，1984)，第50页。

②Intuitionism, p. 15

性》。他批评了传统的信仰即认为古典逻辑的原理绝对有效，与它们所施用的对象无关；他对排中律的有效性提出了质疑，但尚无定论。在1912年的《直觉主义和形式主义》一文中，他举了一个例子，说明排中律不能用于它。①这个例子是集合论中的伯恩斯坦定理：“如果集合A与B的一个子集有同样基数并且B与A的一个子集有同样基数，则A与B有同样基数”，或者用等价形式说成：“如果集合$A(=A_1+B_1+C_1)$与集合A_1有同样基数，那么它也与集合A_1+B_1有同样基数。”这一定理对可数集是自明的。在布劳维尔看来，如果这一定理对更大基数的集合有意义，必须按直觉主义的方式解释为：“如果我们有可能在第一步构造一个规则来确定在类型A和A_1的数学实体之间的一一对应关系，第二步构造一个规则来确定在类型A和类型.A_1，B_1和C_1的数学实体之间的一一对应关系，那么我们就可能从这两个规则通过有穷次运算来得出第三个规则，它确定在类型A和类型A_1和B_1的数学实体之间的一一对应关系。”布劳维尔认为，这种解释是无效的，因为在证明它的过程中要使用排中律。证明是：“从A分划为A；$+B_1+C_1$，我们借助A和A_1之间的对应γ_1得到A_1分划为$A_2+B_2+C_2$，及A_1和A_2之间的一一对应关系γ_2。从A_1分划为$A_2+B_2+C_2$，我们借助A_1和A_2之间的对应得到A_2分划为$A_3+B_3+C_3$，及A_2和A_3之间的一一对应关系γ_3。不定地重复这一程序，将把集合A分划为子集合$C_1, C_2, C_3\ldots$的一个初等序列，子集合$B_1, B_2, B_3, \cdots$的一个初等序列，和一个余下的集合D。我们对C_ν的每一元素指派$C_{\nu+1}$的相应元素，把A的每一其他元素指派给自身，这样我们就得到在A和A_1+B_1之间的对应γ，这是我们所求的。”布劳维尔用一个具体的例子来检验这个证明。令A是0和1之间所有实数的集合，实数用无限十进小数表示；A_1是那些第$(2n-1)$位数字等于第$2n$位数字

---

①Philosophy of Mathematics, pp. 76—77。

的十进小数的集合；不属于A_1 的一个十进小数,按照上述数字相等出现无穷多次或有穷多次，分别属于B_1 或 C_1。对A的任一元素的每一数字用等于它的数偶来替换，我们立即得到一个规则，它确定 A和 A_1 之间的一一对应关系r_1。因为对A_1 的元素(它对应于A的一个任意的有合适定义的元素，如$\pi-3$)，我们可以相继地确定任意多的数字，因此它也是有合适定义的。为了确定按对应关系γ。对应于$\pi-3$的元素，就必须首先判定在$\pi-3$的十进小数展开式中是否会发生下述情况：在奇数位的数字等于后继的偶数位的数字；为达到这个目的，我们或者必须创制一个过程来构造这些相等数偶的一个初等序列，或者必须从这样一个初等序列的存在假定中推出矛盾，这是排中律的一种表述。布劳维尔认为，没有根据相信这两个问题之一可以得到解决，因此，伯恩斯坦定理不允许作出直觉主义的解释。

以上是布劳维尔否定排中律普遍有效的一个著名例证。他在1923年专门发表了《论排中律在数学特别是在函数论中的意义》一文，①进一步阐明了排中律不普遍有效的理由，并给出使用排中律的两个古典分析例子，说明它们是不正确的。他认为，古典逻辑的规律包括排中律是从有穷数学中抽象出来的，后来人们忘记了这个有限的来源，毫无根据地把它们应用到无穷集的数学上去。他说：“对于使用排中律在一个特定的有穷的主要系统中所导出的性质而言，以下所说总是确实的：如果我们有足够的时间供我们支配,那么我们就能达到在经验上证实它们。‘’一个先验的特征是如此一致地被归诸理论逻辑的规律，以致直到现在，这些规律包括排中律，甚至，被毫无保留地应用于无穷系统的数学并且我们不允许受下述考虑的困扰：以这种方式所得到的结果，一般在实践上或理论上不易得到任何经验的证实。在此基础上，许多不正确的理论建立起来了，特别是在上半世纪。”②布劳维尔举了以下两个

---

① 见 F. G. pp. 334 — 345 。

② F. G. p. 336 。

古典数学的例子：

1. 连续统的点形成一个有序点集；

2. 每一数学集合或是有穷的，或是无穷的。

为简单起见，我们把原例中的"种"这个概念改为"集合"。这两个例子都很显然是以排中律为基础的。第一个例子是说，如果一方面 $a<b$ 或者成立或者不可能，或另一方面，$a>b$ 或者成立或者不可能，那么条件 $a<b$ 或 $a>b$ 或 $a=b$ 之一成立。第二个例子也是从排中律导出的，根据排中律，一个集合 S 或者是有穷的或者不可能是有穷的。在后一情况下，S 就有一个元素 S_1；因为否则，根据排中律，S 不能有一元素并且因此会是有穷的，这一情况被排除掉了。再者，S 有一个不同于 S_1 的元素 S_2；因为否则，S 就不可能有一个不同于 S_1 的元素并且因此会是有穷的，这一情况也被排除掉了。如此继续下去，我们就说明了：S 是由不同元素 $S_1, S_2, \cdots$ 组成的序数为 ω 的序集。由上所说，我们可得第二个例子的陈述："每一数学集合或者是有穷的，或者是无穷的"。

以上两例都是把排中律应用于无穷集合。按照布劳维尔的看法，对无穷集合的所有元素无法用排中律断定它们是否具有某一性质。上述两个例子都是不正确的。布劳维尔进一步指出，从第二个例子可以得到一个推广的排中律，而鲍尔查诺—魏尔斯特拉斯的极限定理即"每一有界的无穷点集有一极限点"就要使用这种推广的排中律。这样，鲍尔查诺—魏尔斯特拉斯定理也是不正确的。

否定排中律的普遍有效性，不但是潜无穷论的表现，而且也是我们即将要讲的数学构造观点的表现。海丁在《直觉主义导论》中说：布劳维尔纲领"在于研究心灵的数学构造本身，不涉及关于被构造对象性质的问题，如这些对象是否独立于我们对它们的认识。这一观点立即导致对排中律的拒斥"。①

① Intuitionism, p.1。

海丁比较了以下两个关于自然数定义的例子：

Ⅰ. k是使得$k-1$也是素数的最大素数，或者如果这样的数不存在，$k=i$；

Ⅱ. l是使得$l-2$也是素数的最大素数，或者如果这样的数不存在，$l=1$。

这两个定义有明显的不同，但古典数学完全置它们的差别于不顾。k实际上可以计算($k=3$)；而l无法计算，因为我们不知道成对素数p和$p+2$的偶组成的序列是有穷的或者不是有穷的。所以，直觉主义学派不承认定义Ⅱ作为一个整数的定义；他们认为，仅当给出计算一个整数的方法时，这个整数才被合适地定义。海丁强调说：“这条思路导致对排中律的拒斥，因为如果成对素数的序列或者是有穷的或者不是有穷的，Ⅱ就要定义一个整数了。”①

直觉主义者不承认排中律的普遍有效性，还有一个理由，这就是他们把“真”理解为“证明为真”,把“假”理解为“导致荒谬”这样,排中律就变为：

每一数学命题或者是可证的，或者是导致荒谬的。

可是，在数学中有很多命题，既未被证明为真，也未被证明导致荒谬,也就是说,存在第三种情况,这种情况是暂时的,也许将来可以证明这些数学命题，也许在未来很长时期内还不能证明这些命题。所以，排中律不是普遍适用的。

三、数学对象的可构造性

直觉主义数学由于以潜无穷论为基础，因而强调数学对象的可构造性。直觉主义学派认为，数学对象必须可构造才能算是存在的。海丁说：“在心灵的数学构造的研究中，‘存在，一定是与‘被构造’同义的。”②所谓可构造是指能具体给出数学对象，或者

① Intuitionism, p.2。
② 同上。

能给出找数学对象的算法。

我们首先要批判他们对"构造"所做的唯心主义解释。他们把"构造"归结为"心灵的构造",这样,数学对象的存在也就成了"心灵构造"出来的东西了。我们要剥去他们关于"构造"概念的唯心主义外壳,留下数学构造的合理内核,即强调机械程序和能行性。

上面说过,自然数论是直觉主义数学的基本理论,由它可构造其他理论。在用自然数构造有理数时,没有碰到什么问题。可是,对实数论,直觉主义数学与古典数学之间产生了严重分歧。布劳维尔在一系列论著中创建了直觉主义的实数论。海丁对布劳维尔的理论作了综述和进一步的说明。

实数论是直觉主义学派的数学构造主义的典型表现,下面我们根据海丁的《直觉主义的数学基础》(1931)和《直觉主义导论》(1956)等著作来评述这一理论的要点。

根据戴德金的实数定义,实数可以比较其大小,而这需要引用排中律,因此,在直觉主义者看来,戴德金的实数定义是不合适的。他们另辟蹊径。海丁取"柯西数列"作为他处理实数的基础。"柯西数列"是有理数的数列$\{a_n\}$,它满足以下的收敛条件:对任一正有理数ε,存在一个自然数n_0使得对每一$n \geq n_0$和每一$p>0$, $|a_{n+p}-a_n|<ε$。大家知道,康托尔曾利用柯西数列定义实数,直觉主义者是不能原封不动地采用的,所以,海丁对这种数列作了修改,使得人们可以构造性地给出这种数列:"有理数的一个数列$\{a_n\}$称为柯西数列,如果对每一自然数k,我们能找到一个自然数$n=n(k)$,使得对每一自然数p, $|a_{n+p}-a_n|<1/k$。这必须这样来理解:给定了k,我们可以能行地确定$n(k)$。"①海丁把有理数的一个柯西数列称为"实数生成者"。根据这个定义,海丁首先建立了实数生成者的算术。在直觉主义数学中,"同一"与"一致"是不同的。两个实数生成者$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是同一的,如

---

① Intuitionism, p. 16。

果对每一 n，$a_n = b_n$；它们是一致的，如果对每一k，我们可以能行地找到一个 $n = n(k)$，使得对每一 p，$|a_{n+p} - b_{n+p}| < 1/k$。同一关系写成：$\{a_n\} \equiv \{b_n\}$；一致关系写成：$\{a_n\} = \{b_n\}$。如果从假设 $\{a_n\} = \{b_n\}$ 导出矛盾，则记为 $\{a_n\} \neq \{b_n\}$，这是一致关系的否定。如果可找到一个n和一个k，使得对每一p，$|a_{n+p} - b_{n+p}| > 1/k$，则 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分离，记为 $\{a_n\} \# \{b_n\}$。实数生成者的四则运算与古典分析的四则运算基本相同，不同的是，在实数生成者的乘法中，积 $\{a_n\}\{b_n\}$ 与 $\{0\}$ 是一致的，但既非 $\{a_n\}$ 又非 $\{b_n\}$ 是如此。

把柯西数列作为实数生成者，我们可以确定一些个别的实数，但是用这种方法不能产生实数连续统，不能产生任意的实数。布劳维尔和海丁引进"无限进展序列"，这种序列是无限延伸的。现在考虑满足以下条件的有理数无限进展序列 $\{a_n\}$：对每一，和 p，$|a_n - a_{n+p}| < 1/n$。在 $a_1, \cdots, a_n$ 的选择之后，我们知道哪些有理数可以选为 a_{n+1}，哪些不可以。对产生无限进展序列的选择的自由可以受到各方面限制，只要在每一阶段上我们能够判定哪些成分可以取为下一次选择，哪些不行。

无限进展序列的主要作用在于它传达了产生的方式。在无限进展序列这个概念的基础上，布劳维尔和海丁引进了"展形"这个概念。海丁说："一个展形M由两个规则确定；第一个规定自然数的选择，我称之为展形规则AM，而第二个或补规则 Γ_M 的作用是对按第一规则所产生的自然数的任一无限进展序列，指派数学实体的一个序列。""一个展形规则是一个规则A，它把自然数的有穷序列分为可允许的序列和不可允许的序列，其规定如下：

(1) 对每一自然数k，n可判定它是否是一元可允许序列；

(2) 每一可允许序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$ 是可允许序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个直接下降序列；

(3) 如果给定可允许序列 $a_1, \cdots, a_n$，A允许我们判定；对每一自然数k而言，$a_1, a_2, \cdots, a_n, k$ 是否是可允许序列；

(4）对任一可允许序列$a_1, \cdots, a_n$至少可找到一个自然数k使得$a_1, \cdots, a_n, k$是一个可允许序列。”“一个展形M的补规则Γ_M对于按M的展形规则可允许的任一有穷序列，指派一个确定的数学实体。”①例如，下述的M就是一个展形：

令$r_1, r_2, \cdots$指示有理数的一个枚举。

Λ_M：每一自然数形成一个可允许的一元序列；如果$a_1, \cdots, a_n$是一个可允许序列，那么$a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}$是一可允许序列当且仅当$|r_{a_n} - r_{a_{n+1}}| < 2^{-n}$。

Γ_M：对序列$a_1, \cdots, a_n$（如果是可允许的）我们把有理数r_{a_n}指派给它。

M的元素是实数生成者$r_{a_1}, r_{a_2}, \cdots$。对任一实数生成者c，我们可找到M的一个分子m使$c = m$。在这个意义上，M表达了实数生成者的连续统。

通过无限进展序列所定义的不是单个的实数，而是实数的展形或连续统。“展形”实际上是从产生方式来定义的“集合”。当两个规则结合起来时，就可产生出各种数学对象。

展形相当于从产生方式定义的集合，而“种”相当于用性质定义的集合。假定我们已确定了数学实体的某个“总体”，P是某个构造性地定义的性质。性质P将从给定的总体中选出一个合适的子类。粗略说来，这个子类就是布劳维尔所说的种。海丁说：“一个种是数学实体可被假定具有的一个性质。在一个种S已被定义后，任何数学实体（在S之前曾被定义或可能曾被定义，并且满足条件S）是种S的一个分子。”②

对实数生成者来说，与一个给定的实数生成者相一致这个性质就是在上述意义上的一个“种”。这个种就是实数。至此，我们完成了从实数生成者到实数的过渡。

按照直觉主义者的构造性数学观点，不但古典分析不能成立，

---

① Intuitionism, pp. 34—35。

② 同上，p. 37。

而且还有很大一部分古典数学也不能成立，如古典集合论等。问题在于，他们只承认可构造的数学存在命题，只承认构造性方法；不承认非构造性的纯存在命题，如鲍尔查诺一魏尔斯特拉斯定理，不承认非构造性方法，如以排中律为基础的反证法，如此等等。

直觉主义者致力于改造古典数学的工作，使很大一部分古典数学被彻底地否定了。他们在批判古典数学的基础上建立起直觉主义数学。如何评价他们的工作呢？我们同意美国著名数理逻辑学家克林的意见："直觉主义者已经创造一种完全新的数学，包括连续统理论及集论。这数学应用了一些概念并作出一些区别都是在古典数学中所没有的；它本身亦非常动人，但作为古典数学的替代者来说，它却显得缺乏力量而且在许多方面其发展亦很烦难。例如，在布劳维尔的连续统理论中，我们不能断言任意两个实数 a 与 b 或者相等或者不等。我们关于 a 与 b 间的相等性或不等性的知识可以或详或略。$a \neq b$ 表示由 $a=b$ 而引出矛盾，而 a # b 则是更强的不等性，它表示可以指出一个隔开 a 与 b 的有理数的例子。显然由 a # b 可以推出 $a \neq b$。但是可以找出一对实数 a 与 b，使得我们不知道是否或者 $a=b$ 或者 $a \neq b$（或 a#b）。显然由于这些复杂性使得连续统的古典理论被一些在形式上较不明晰的东西所代替了。"①从上面我们所介绍的直觉主义连续统理论，可以清楚地看出，克林所批评的直觉主义数学"缺乏力量"、"烦难"、"复杂"、"不明晰"等缺陷是多么切中直觉主义数学的要害呵！但另一方面，我们也不能把直觉主义数学一棍子打死，它是一种具体的关于数学的构造主义理论，不属于直觉主义哲学。直觉主义学派开创了构造性数学研究的新方向，对构造性数学的发展起了积极的推动作用。克林指出："用重新解释的另一种方式而直觉主义地重新建立古典数学的可能性还是有的。"②直觉主义数学强调"能行性"，它也开辟了能行性研究的新方向。这些都是直觉主

---

①克林著：《元数学导论》（上册），第55页。
②同上。

义数学的功绩。总之，对直觉主义数学的评价应当一分为二，不能全盘肯定，也不能全盘否定。

第三节　直觉主义逻辑

直觉主义学派认为，逻辑是数学的一部分，决不是数学的基础。海丁说：“没有一种科学，特别是，没有一种哲学或逻辑可以作为数学的先决前提。如果引用任何哲学原则或逻辑原则来作证明的工具，那将是一个循环，因为在表述这些原则时已经用到数学的概念了。“”在直觉主义数学中,我们的推理并不是依照固定的模式从而把这些模式集成逻辑，反之，每一项的推理都是直接地由它的显然性来验证”,但仍然有些一般规则,依照这些规则可以从一些数学的定理而用直觉地明显的方式推出新定理；关于这些相互关系的方式的理论可以在‘数理逻辑’内加以处理,这样,数理逻辑便是数学的一个分支而在数学以外它就没有合理的应用了。”①海丁在说明直觉主义逻辑的建立时举了一个例子。设 A 是可被 8 除的整数的性质，B 是被 4 除的整数的性质，C 是被 2 除的整数的性质。对 $8a$，我们可写成 $4\times 2a$；通过这个数学构造 P，我们可看到，性质 A 推出 B（即 $A\to B$）。类似的构造 Q 表明，$B\to C$。通过首先实施 P 然后实施 Q（P 和 Q 的联合），我们得到 $8a=2\times(2\times 2a)$，这表明 $A\to C$。如果我们以任意的性质代 A, B, C, 那么以下过程仍然有效：如果构造 P 表明 $A\to B$, Q 表明 $B\to C$, 那么 P 和 Q 的联合就表明 $A\to C$。这是一个逻辑定理。在直觉主义者看来，逻辑定理是从数学定理推演得来的，与数学定理没有根本的不同,只不过是,逻辑定理更为一般,就如同“整数加法是可交换的”这一命题比“$2+3=3+2$”更为一般一样。海丁得出结论说：“每一条逻辑定理都是这样的情况：它只是具有最一般性

---

①转引自克林《元数学导论》，第 53-54 页。

的数学定理；这就是说，逻辑是数学的一部分，而决不能作为数学的基础。”①

综上所说，直觉主义者与逻辑主义者在逻辑与数学的关系问题上，其看法是正好相反的。逻辑主义者认为，从逻辑可推出全部数学，数学是逻辑的延伸；而直觉主义者认为，逻辑是数学的一部分，是从数学推出来的。我们可以把直觉主义者称为“数学主义者”。我们认为，把逻辑化归为数学，或把数学化归为逻辑，都是不正确的，因为逻辑和数学虽有密切联系，但它们毕竟是两门性质不同的学科。

由于直觉主义逻辑与直觉主义数学有密切联系，因而也具有构造性特点。海丁在1930年发表两篇论文，首先建立了直觉主义的命题演算系统和谓词演算系统，后来在1956年的《直觉主义导论》中又作了进一步说明。②下面对直觉主义逻辑做一个简单的评价。

一、直觉主义的命题演算

直觉主义者把逻辑中所讨论的命题限于数学命题，因而他们对命题真假和命题联结词做构造性解释。

合取式$A \wedge B$能被断定当且仅当不但A而且B能被断定。

析取式$A \vee B$能被断定当且仅当命题A和B中至少有一个能够被断定。

所谓一个命题A能被断定是指我们对A完成了一个具有某些给定的特性的数学构造；这个构造证明了命题A，被称为A的证明。为简单起见，在直觉主义逻辑中，用A表示命题A所想要的一个构造。

否定式$\neg A$能被断定当且仅当我们有一个构造：从假定完成了一个构造A就导致矛盾。

① Intuitionism, p. 6。

② Intuitionism, pp. 97—114。

蕴涵式 $A \to B$ 能被断定，当且仅当我们有一个构造 C，与 A 的证明结合起来，就得到 B 的证明。

海丁在1930年以八，∨，→和 ¬ 作为不定义的常项建立了以下十一条公理的直觉主义命题演算形式系统：

Ⅰ. $\vdash p \to (p \wedge p)$。

Ⅱ. $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$。

Ⅲ. $\vdash (p \to q) \to ((p \wedge r) \to (q \wedge r))$。

Ⅳ. $\vdash ((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$。

Ⅴ. $\vdash q \to (p \to q)$。

Ⅵ. $\vdash (p \wedge (p \to q)) \to q$。

Ⅶ. $\vdash p \to (p \vee q)$。

Ⅷ. $\vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$。

Ⅸ. $\vdash ((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$。

Ⅹ. $\vdash \neg p \to (p \to q)$。

Ⅺ. $\vdash ((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p$。

推演规则与古典命题演算的规则相同。

约翰逊（I. Johansson）在1936年去掉上述的公理Ⅹ，所得的系统称为"极小演算"。

在直觉主义系统中，$(p \to q) \vee (q \to p)$，排中律 $p \vee \neg p$，双重否定律的一个形式 $\neg\neg p \to p$，等等公式是不成立的。如果将公理Ⅺ换为：

Ⅺ'. $((\neg p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)) \to p$，或者在海丁系统中加上双重否定律 $\neg\neg p \to p$，那么所得的系统就是古典命题演算了。Ⅺ' 是反证律，强于公理Ⅺ（归谬律）；公理Ⅺ加上 $\neg\neg p \to p$ 就可推出反证律Ⅺ'。古典命题演算强于海丁系统，海丁系统又强于极小演算。

我们刚才说，双重否定律的一个形式 $\neg\neg p \to p$ 在海丁系统中是不成立的，另一形式 $p \to \neg\neg p$ 怎样呢？

(1) $\vdash p \to \neg\neg p$。

这是一条定理，它是说，从p可得出p是不可能的，这是不可能的。

(2) $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$。

这是一个定理，但它的逆$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$则是不成立的。

从(2)可得到：

(3) $\vdash (p \to q) \to (\neg\neg p \to \neg\neg q)$。

在(1)中作代入，可得：

(4) $\vdash \neg p \to \neg\neg\neg p$。

在(2)中以$\neg\neg p$代q，再用(1)可得：

(5) $\vdash \neg\neg\neg p \to \neg p$。

(4)和(5)说明，$\neg\neg\neg p$与$\neg p$是等值的，因此就不需要考虑三个或三个以上相继的否定词，三个否定词可化归为一个。

从$\vdash p \to p \vee q$，据(2)可得$\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p$；同样，我们有$\vdash \neg(p \vee q) \to \neg q$，由此可得：

(6) $\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$。

(6)的逆也是真的：

(7) $\vdash \neg p \wedge \neg q \to \neg(p \vee q)$。

(6)和(7)是德摩根律一种形式的等值关系。另一种形式是不等值的，以下的是定理：

(8) $\vdash \neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q)$。

但$\neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$是不成立的。

(9) $\vdash \neg\neg(p \vee \neg p)$。

由$\neg(p \vee \neg p)$据(6)蕴涵$\neg p \wedge \neg\neg p$，这是一个矛盾。(9)是说，谁要是说排中律荒谬，他便陷于荒谬了；这就是布劳维尔所说的“排中律荒谬的荒谬”。这表明，直觉主义学派从构造性观点看排中律，认为排中律虽然没有被证明为真，但也没有被证明导致荒谬；它是一个不导致荒谬的命题。由例可见，直觉主义把一个数学命题分为三种情况：被证明(真)、导致荒谬(假)和不导致荒谬(不

假）；不导致荒谬并不等于被证明。我们能否说直觉主义逻辑是三值逻辑呢？不能！莫绍揆教授分析说：“这三个情况并未穷尽了一切情况。其实，如果用这三个情况对直觉主义所承认的逻辑规律从形式上作分类：有些规律不以否定开始，有些规律以一个否定开始，有些规律以两个否定开始，这倒是很好的，但它并未反映出每个命题的本质。最明显的是：如果命题只有三值，那么直觉主义系统内应有下列的逻辑规律：‘或A或非A或非非A’，而它并非直觉主义的逻辑规律。足见对逻辑规律所作的形式分类与命题的本质无关，说直觉主义采用真、假、不假三值是没有根据的。”①直觉主义者虽把数学命题分为三种情况，但他们并未以三个值为基础来建立系统，没有以三个值来解释命题联结词，因此他们的系统与三值逻辑系统是完全不同的。

在命题演算中还有以下一些重要公式：

从(8)使用(2)和(6)可得：

$\vdash \neg\neg(p\wedge q)\to\neg(\neg p\vee\neg q)\to\neg\neg p\wedge\neg\neg q$，由此得：

(10) $\vdash \neg\neg(p\wedge q)\to\neg\neg p\wedge\neg\neg q$。

以下的逆命题也是真的：

(11) $\vdash \neg\neg p\wedge\neg\neg q\to\neg\neg(p\wedge q)$。

下面的(12)是定理，但逆命题不成立；

(12) $\neg\neg p\vee\neg\neg q\to\neg\neg(p\vee q)$。

二、直觉主义的一阶谓词演算

建立直觉主义一阶谓词演算的基础是对量词做构造性的解释。$\vdash(\forall x)A(x)$表示我们有一个一般的构造方法，使得当给出x的变程中的任一元素a时，可以得到一个构造A(a)，也就是说，可以构造对A(a)的一个证明。$\vdash(\exists x)A(x)$表示实际上已构造出使A(a)为真的一个元素a。

①莫绍揆：《数理逻辑初步》，上海人民出版社1980年版，第100页。

直觉主义的一阶谓词演算形式系统的公理由原来的命题演算的11条公理（“公式”的概念要推广到谓词演算中）加上以下两条关于量词的公理组成：

XII. $(\forall x)F(x) \rightarrow F(y)$，

XIII. $F(y) \rightarrow (\exists x)F(x)$。

推演规则与经典谓词演算的规则相同。

为了说明这个系统的特点，海丁列举了一些重要的定理，并指出经典谓词演算中的一些重要定理在直觉主义谓词演算中是不成立的。现简介如下：

(1) $\vdash (\forall x)F(x) \rightarrow \neg(\exists x)\neg F(x)$。

(2) $\vdash (\exists x)F(x) \rightarrow \neg(\forall x)\neg F(x)$。

这两条定理显然成立，但其逆蕴涵虽在经典演算中成立，而在直觉主义演算中却不成立。例如，在(1)中设x的变程是实数，F(x)是“x是有理数或x是无理数”。从并不存在一个x使得并非“x是有理数或x是无理数”，不能得到：对所有x而言，x是有理数或x是无理数；因为从构造观点来看，后者对无穷域使用了排中律，而这是非构造性的，直觉主义者不予承认。

(3) $\vdash (\forall x)\neg F(x) \rightarrow \neg(\exists x)F(x)$。

(4) $\vdash \neg(\exists x)F(x) \rightarrow (\forall x)\neg F(x)$。

(5) $\vdash (\exists x)\neg F(x) \rightarrow \neg(\forall x)F(x)$。

(3)和(4)说明，$(\forall x)\neg F(x)$ 与 $\neg(\exists x)F(x)$ 是等值的，可是(5)的逆命题在直觉主义系统中是不成立的。

在(3)中作代入可得：

(6) $\vdash (\forall x)\neg\neg F(x) \rightarrow \neg(\exists x)\neg F(x)$。

在(4)中作代入可得：

(7) $\vdash \neg(\exists x)\neg F(x) \rightarrow (\forall x)\neg\neg F(x)$。

以下的(8)可由(6)应用命题演算的定理(3)和(5)而得到：

(8) $\vdash \neg\neg(\forall x)\neg\neg F(x) \rightarrow \neg(\exists x)\neg F(x)$。

由(8)可得以下的弱形式：

(9) $\vdash \neg\neg(\forall x)F(x) \to \neg(\exists x)\neg F(x)$。

由(9)和(7)得到：

(10) $\vdash \neg\neg(\forall x)F(x) \to (\forall x)\neg\neg F(x)$。

我们应当特别注意，(10)的逆命题在直觉主义系统中不成立。令人感兴趣的是，如果将x的变程限于有穷域，(10)的逆是成立的；例如，如果x只取两个值，那么(10)的逆就变为直觉主义命题演算系统中的定理(11)。布劳维尔和海丁曾举过一个例子，说明(10)的逆不但是在直觉主义系统中不可证，而且还是假的。(10)的逆不成立是直觉主义逻辑的一个最显著的特征。

从(3)和(4)应用命题演算中的定理(2)可以得到：

(11) $\vdash \neg\neg(\exists x)F(x) \to \neg(\forall x)\neg F(x)$。

(12) $\vdash \neg(\forall x)\neg F(x) \to \neg\neg(\exists x)F(x)$。

在(5)中作代入可得：

(13) $\vdash (\exists x)\neg\neg F(x) \to \neg(\forall x)\neg F(x)$。

从(13)和(12)可得：

(14) $\vdash (\exists x)\neg\neg F(x) \to \neg\neg(\exists x)F(x)$。

(14)的逆命题也是不成立的,但有趣的是,对(14)的逆命题中的x只取两个值，可以得到 $\neg\neg(p \vee q) \to \neg\neg p \vee \neg\neg q$，这在命题演算中也是不可证的。这一点与(10)的逆有所不同。

在海丁建立了直觉主义逻辑系统之后，有许多逻辑学家从事直觉主义逻辑的研究。甘岑在1934年建立了直觉主义逻辑的自然演绎系统，其构成方式是在甘岑的经典逻辑自然演绎系统(第九章第四节)中，去掉规则：

$$\frac{\bar{\bar{A}}}{A}。$$

苏联学者科尔莫哥洛夫(Kolmogorov)在1932年把海丁的逻辑演算解释为"问题演算"。问题用字母表示，$a \wedge b$解释为这样的一个问题："解a又解b"，$a \vee b$为"解a和b中的至少一个"，$a \to b$为"给定了a的一个解，去解b"，$\neg a$为"从假设x已

被解，推出一个矛盾”。这样，科尔莫哥洛夫把联结词$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\neg$解释为从已给出的问题形成新问题的运算。科尔莫哥洛夫的解释完全符合直觉主义者把数学命题的证明等同于一个构造的观点。

海丁所建立的系统称为希尔伯特型的一阶直觉主义谓词演算系统。

现在在数理逻辑文献中，通常所采用的一阶直觉主义谓词演算系统——希尔伯特型或者甘岑型，都对原来海丁的系统和甘岑的系统作了改进，有兴趣的读者可进一步参看克林著的《元数学导论》。

三、直觉主义逻辑与经典逻辑的关系

以上我们就海丁的直觉主义逻辑系统论述了它的特点。我们清楚地看到，它具有构造性特点，排中律、反证律、双重否定消去律等不是有效的逻辑规律，因此，它与经典的命题演算和谓词演算不同，是一种非经典逻辑。

直觉主义逻辑的公理和定理在经典逻辑中都成立，因此，直觉主义逻辑是经典逻辑的一个真部分。

我们现在要问：经典逻辑能否化归于直觉主义逻辑呢？能！下面我们来陈述一些重要结果。

格里文科（Glivenko）在1929年证明了以下定理：

如果在经典命题演算中有$\Gamma\vdash E$，则在直觉主义命题演算内有$\neg\neg\Gamma\vdash\neg\neg E$；如果在经典命题演算内，$\neg\Gamma,\Delta\vdash\neg E$，则在直觉主义命题演算内$\neg\Gamma,\neg\neg\Delta\vdash\neg E$。其逆命题也成立。

哥德尔在1932年对格里文科的结果作了发展。他首先证明了可作为上述定理系定理的一个结果：

如果E是一个命题字母公式，除$\wedge$及$\neg$外不含其他逻辑符号，并且在经典命题演算内$\vdash E$，则在直觉主义命题演算内$\vdash E$。①

①参看克林：《元数学导论》，第545—546页。“Γ”代表一组公式，“$\vdash$”读为推出，E代表任一公式。“$\vdash E$”表示E从空公式推出，即E是一定理。哥德尔的文章见Davis编的The Undecidable (New York, 1965), pp. 75—81。

哥德尔进一步证明了他的主要结果，这一结果依赖于下面的变换：

$$A\to B \qquad A\wedge B \qquad A\vee B \qquad \neg A \qquad (\forall x)A(x) \qquad (\exists x)A(x)$$

$$\neg(A \wedge \neg B) \qquad A\wedge B \qquad \neg(\neg A\wedge \neg B) \qquad \neg A \qquad (\forall x)A(x) \qquad \neg(\forall x)\neg A(x)$$

设E为具有上面第一行各形状的各部分所组成的任一公式，则将E中具有上面第一行的各部分换为第二行相应部分所得的一个公式记为E'。

哥德尔关于经典逻辑在直觉主义逻辑中的解释的主要定理是：

对命题演算而言，如果古典地 $\vdash E$，则直觉主义地$\vdash E'$；对形式数论系统而言，如果古典地$T\vdash E$，则直觉主义地 $T'\vdash E'$。其逆命题也成立。

哥德尔的结果表明，经典的命题演算可在直觉主义命题演算中表示；以经典逻辑为基础的形式算术也能在以直觉主义逻辑为基础的形式算术中得到解释。由此可得：以经典逻辑为基础的形式算术相对于以直觉主义逻辑为基础的形式算术是一致的。

我们应当注意的是，在哥德尔1932年的定理中，对命题演算来说，要不具有假定公式T，否则，如果古典地$T\vdash E$，但是并非直觉主义地 $T'\vdash E'$ 例如,公式的推演关系 $\neg\neg A\vdash A$。另一点要注意的是，哥德尔的结果对谓词演算不成立。令E为$(\forall x)\neg\neg A(x)\to\neg\neg(\forall x)A(x)$，我们在经典谓词演算中有 $\vdash E$，但在直觉主义谓词演算中没有 $\vdash E$（参看以上对海丁谓词演算系统的定理10的说明），也没有 $\vdash E'$。若有 $\vdash E'$,即

$\vdash\neg((\forall x)\neg\neg A(x)\wedge\neg\neg\neg(\forall x)A(x))$，

据 $\vdash(A\to\neg B)\longleftrightarrow\neg(A\wedge B)$ 可得：

$\vdash(\forall x)\neg\neg A(x)\to\neg\neg\neg\neg(\forall x)A(x)$，

据 $\vdash\neg\neg\neg A\longleftrightarrow\neg A$ 可得：

$\vdash(\forall x)\neg\neg A(x)\to\neg\neg(\forall x)A(x)$，

即 $\vdash E$。

甘岑在1936年对哥德尔原来的变换作了改进，唯一的不同是使蕴涵公式不变换，其他不动，变换后的公式记为E°，他证明了以下定理：

对形式数论系统而言，如果古典地 $\Gamma\vdash E$，则直觉主义地 $\Gamma^{0}\vdash E^{\circ}$。

应当注意的是，甘岑的定理对命题演算或谓词演算不成立，例如取E为 $\neg\neg A\rightarrow A$。

克林对以上哥德尔和甘岑等人的结果作了综合和推广。如果将 E°中的原子公式A换为 $\neg\neg A$，那么所得公式记为$E^{o\dagger}$。克林证明了以下的定理：

对命题演算，谓词演算或形式数论系统而言，如果古典地$\Gamma\vdash E$，则直觉主义地 $\Gamma^{0\dagger}\vdash E^{0\dagger}$。逆命题也成立。①

综上所说，经典逻辑可定义在直觉主义逻辑之中，经典的形式算术可在直觉主义的形式算术中得到解释，因此，经典的形式算术相对于直觉主义的形式算术是一致的。经典逻辑与直觉主义逻辑有着密切的联系，它们同是在逻辑科学园地上长出的两朵香花。我们应当开展对直觉主义逻辑的研究。当我们听到直觉主义逻辑这个名称时，决不要把它同直觉主义哲学划等号。

著名的波兰逻辑学家莫斯托夫斯基（A Mostowski）对直觉主义逻辑作了十分公正的评价，我们引证如下：“直觉主义逻辑只是为数众多的非古典逻辑中的一种。此外还有几种这样的逻辑，最先由卢卡西维茨和波斯特，稍后又由其他逻辑学家规定出来了。其中有些是出于纯形式理由而发明的，但另外几种——例如模态逻辑——则有真正的哲学价值。在我们看来，这些系统中直觉主义逻辑拥有一种独一无二的地位：它是迄今建立的唯一正被相当大一群干练的科学家实际使用着的逻辑。它也是唯一已被推广到命题逻辑和量词逻辑之外而用来叙述数学的某些部分的逻辑。头一

①见《元数学导论》第545—546页。

个想出一种不同寻常的逻辑的卢卡西维茨曾希望有一天会出几种象非欧几何那样被人实际使用的逻辑。迄今发明的非古典逻辑大多数却并没有实际使用，尽管其中的几种在二值逻辑基础上以元数学方式得到了研究。看来，直觉主义逻辑是唯一还有机会实现卢卡西维茨计划的一个。同时，这种逻辑是建立在一种别出心裁始终如一的数学观之上的。这两个情况说明直觉主义逻辑为什么从创立之时起就引起强烈的兴趣。”①

①莫斯托夫斯基：《 数学基础研究三十年》，华中工学院出版社1983年出版，第12一13页。

第十三章 形式公理学和证明论

在第三次数学危机之后，数理逻辑发展史上出现的又一个重大事件是证明论的建立。证明论的直接推动力是为了克服第三次数学危机，其理论基础是形式公理学。这两种理论都是同伟大的希尔伯特的名字紧密联系在一起的。

希尔伯特 David Hilbert, 1862—1943) ,出生于柯尼斯堡（前苏联加里宁格勒）。1880年入柯尼斯堡大学主修数学，1885年获博士学位。1886年任该校讲师，1892年任副教授，1893年任教授。1895年任哥廷根大学教授，1930年退休。

希尔伯特在数学领域内作出了许多卓越贡献，这些贡献都刻上了他的名字，如希尔伯特空间，希尔伯特不等式，希尔伯特变换，希尔伯特不变积分，希尔伯特不可约性定理，希尔伯特基定理，希尔伯特公理，希尔伯特子群，希尔伯特类域。希尔伯特对理论物理也做过创造性的研究工作，首先将积分方程论用于气体运动论和辐射理论，提出了把引力论和电动力学统一起来的一种方法。希尔伯特对数学基础和数理逻辑的研究是他科学工作的一个重要组成部分，形式公理学和证明论纲要是最主要的两大成果。希尔伯特在这方面的主要著作有《几何基础》》(1899),《论逻辑和算术的基础》(1904),《《论无穷》(1925),《数学的基础》(1927),《理论逻辑基础》(与阿克曼合著,1928),《数学基础》(两卷,与贝尔纳斯合著,1934—1939)。

希尔伯特在哥廷根大学任教期间，培养了一批优秀的数学家和逻辑学家，并形成了数学基础与数理逻辑领域内的一大学派，在数理逻辑史上被称为形式主义学派。形式主义学派并不是一般的哲学流派，而是科学上的一个学派。形式主义学派基本的理论是

希尔伯特提出的形式公理学和证明论，这属于具体科学的范围。在形式主义学派中，有的人在数学的哲学问题上宣扬唯心主义的纯形式观点，但作为形式主义学派代表人物的希尔伯特并没有这种唯心主义的哲学观点，他也没有自命为形式主义者。对具体问题必须进行具体分析，不要将科学问题同哲学问题和对科学问题的哲学观点混为一谈。下面我们评述希尔伯特在数理逻辑史上的两大开创性工作。

第一节　从实质公理学到形式公理学

所谓公理学是指关于公理方法或公理系统的理论。实质公理学也称具体公理学,它所研究的对象、性质和关系 简称 对象域 ”) 先于公理而具体给定，并且是唯一的，然后引入初始概念以表示该对象域中的东西，建立公理以刻划这些东西的根本特点，用演绎推理来证明这个对象域中的真理。这种公理学是对经验知识的系统化整理，公理是从已知的事实中选出的少数基本原理，一般是自明的。欧几里得几何和牛顿力学都是实质公理学。与实质公理学不同，形式公理学(或称抽象公理学) 不预先给定任何对象域，不和任何实际的知识相结合；初始概念在引入公理之前是不加定义的，公理可以看成是初始概念的定义(称为 隐定义 ”) 它不涉及任何意义而展开形式的推演；对初始概念经过不同的解释，一个形式公理系统可以有许多对象域(模型) 。例如，命题演算系统就是一个形式系统，它的对象域在一种解释下是命题，在另一种解释下是电路上的接点。

从公元前三世纪欧几里得的《 几何原本》 到18 99年希尔伯特的《 几何基础》 ，经历了大约两千三百年。这是一个从实质公理学发展成为形式公理学的过程。这一过程由以下三个阶段组成。

一、第一阶段——实质公理学《几何原本》

在第一个实质公理系统——欧几里得的《几何原本》之前的一段时期，即从公元前600年直到公元前300年的希腊古典时期，希腊人在社会实践 例如建筑、土地测量和航海等等)的推动下,数学已取得了重要成果。《几何原本》就是这些成果的结晶。下面我们仅以几何学为例说明这一时期的成就。

爱奥尼亚学派的创始人泰勒斯(Thales，公元前640年左右到公元前546年左右）曾一度住在埃及进行商务活动，据说在埃及学了不少数学知识。相传他曾用一根已知长度的竿子通过同时测量竿影和金字塔影之长，求出了金字塔的高度，并利用关于相似三角形的这一类知识计算过航船到海岸的距离。

毕达哥拉斯(Pythagoras）曾就学于泰勒斯，以后到埃及和巴比伦游历，在那里学到一些数学知识。他所创立的学派活动于公元前580年左右至公元前400年左右。这一学派开创了把几何学作为证明的演绎科学来进行研究的方向。毕达哥拉斯学派的学者用归谬法证明了正方形的对角线同它的一边，即 $\sqrt{2}$ 与 1 的不可公度,这个证明和现今对 $\sqrt{2}$ 为无理数的证明相同。他们的最出名的成果是毕达哥拉斯定理本身，这是欧几里得几何的一个关键定理。毕达哥拉斯学派发现了关于三角形、平行线、多边形、圆、球和正多面体的一些定理。特别是他们知道三角形三内角之和是180度。关于相似形的一套理论，以及平面可为等边三角形、正方形和正六边形填满这一事实，都属于毕达哥拉斯学派的研究成果。

著名的原子论哲学家德谟克利特(Democritus，约公元前460一370),考察了许多数学问题。他写出了关于几何、数、连续的直线和立体的书。他的几何著作很可能是《几何原本》问世以前的重要著作。他发现了圆锥和棱锥的体积等于同底同高的圆柱和棱柱体积的三分之一，后来这一发现成为阿基米得(Archimedes，公元前287一212）拟定无穷小方法的出发点。

在古典时期，有好些数学结果是为解决三个著名的作图问题而得出的副产品。这三个作图题是：作一正方形使其与给定的圆等面积；给定立方体的一边，求作另一立方体之边，使后者体积两倍于前者体积；以及用尺规三等分任意角。智者派的希比阿（HiPPias，生于公元前460年左右）借助于一种特殊的超越曲线（割圆曲线）找到了求解三等分角的问题，只是这种曲线本身也不能用尺规作出。据注释家普罗克洛（Proclus，公元五世纪）说，第一个编写《几何原本》的是公元前五世纪的开奥斯人希波克拉底（HiPPocrates of Chios），这个本子现已失传。希波克拉底在研究圆求方问题时发现，一个以曲线弧为边的月牙形面积等于一个直边图形的面积；或者说把曲边图形化成了直边图形。希波克拉底还搞出了另外三个月牙形的等积直边形。他还指出倍立方问题可化为在一线段与另一双倍长的线段之间求两个比例中项的问题。智者派学者安蒂丰（Antiphon，公元前五世纪）在搞化圆为方问题时想起用边数不断增加的内接多边形来接近圆面积。另一个智者派学者布里逊（Bryson，约公元前450年）又用外切多边形来丰富这一思想。安蒂丰进一步提出把圆看作是无穷多边的正多边形。

著名哲学家柏拉图（Plato，公元前427年－347年）于公元前387年左右在雅典成立学园，它在好多方面象现代的大学。在柏拉图学园中，数学这门学科占有重要地位。柏拉图学派把数学当作进入哲学的阶梯，非常重视演绎证明。

柏拉图学派研究了棱柱、棱锥、圆柱和圆锥；并且他们知道正多面体最多只有五种。他们最重要的发现是圆锥曲线。此外，他们还对不可公度量进行了研究，指出怎样用希比阿的割圆曲线来化圆为方。

古典时期最大的数学家欧多克斯（Eudoxus，公元前408年左右－355年），曾加入过柏拉图学派。他在数学上的第一个大贡献是关于比例的新理论，他在处理不可公度比时，建立了以公理为

依据的演绎法。他首先应用了穷竭法，这是确定曲边形面积和曲面体体积的有力方法，是微积分的第一步。欧多克斯用这种方法证明了两个圆面积之比等于其半径平方之比，两球体积之比等于其半径立方之比，棱锥体积是同底同高棱柱体积的三分之一，以及圆锥体积是其相应的圆柱体积的三分之一。

古典时期的最后一位数学家奥托尼克（Autolycus，生活于公元前310年前后），在《论运动的球》一书中研究了球面几何。这本书的形式是很有意义的，图上的点是用字母来代表的，命题是按逻辑次序排列的，每个命题先作一般性的陈述，然后再重复，但重复陈述时明确参照附图，到最后给出证明。

在希腊几何学发展的同时，希腊哲学家们为了辩论的实际需要，发展了论辩术。据记载，埃利亚学派的芝诺（Zeno of Elea，公元前五世纪）是论辩术的发明者，他使用了归谬法，通过假定存在多推出荒谬结论来为巴门尼德的一元论作辩护。苏格拉底（Socrates，公元前469年一公元前399年）的问答法也使用了类似芝诺的方法，所不同的是，苏格拉底从假设出发所推出的结论并不一定是自相矛盾的，有时可以单纯是假的。柏拉图的《对话录》详细论述了论辩的方法，诸如归谬法、包含有反驳的论证方法、寻找定义的方法，等等。他在对话的过程中阐明了许多逻辑原理，如矛盾律等。

伟大的学者亚里士多德在《分析篇》中总结、概括了几何学与逻辑学的丰富资料，在历史上第一次对公理方法作了论述。《前分析篇》的核心是论述如何进行演绎证明的问题。亚里士多德在这里系统地研究了三段论，研究了通过这种推理形式从前提推出结论的逻辑规则，把整个三段论体系构成为一个自然演绎系统。这是公理方法的一种应用，自然演绎系统的初始规则相当于公理。《后分析篇》主要是研究按照演绎证明建立起来的学科本身的逻辑结构与逻辑要求的问题。亚里士多德说：“所证明的知识必须是从真实的，初始的，直接的，比结论更为知道的、先于结论而存在

的，作为结论原因的这些东西推论出来的。”①假如我们不具有初始的、直接的即无法证明的命题，那么证明就是不能实现的，就会出现无穷倒退和循环论证。亚里士多德得出结论说：并非一切知识都是证明的知识，直接的知识是不可能证明的。②由此可见，亚里士多德明确承认，在科学知识的证明过程中，必须有初始的、直接的、不能证明的知识，这些构成了证明的出发点，亚里士多德把这些出发命题称为"初始前提"、"基本真理"或"本原"。在证明的科学所用的出发命题中，有些是专属每一门科学的，有些是不同科学所共有的。

亚里士多德把出发命题划分为下面几种：③

1．论题，这是一种无法证明的命题，它不是研究者必须预先具有的。

论题又分为假设和定义：

(1)假设，这是肯定或否定某种东西存在的一种命题；

(2）定义，这是对某事物的规定，确定某物究竟是什么，例如，"1是一个不可分割的量"就是定义。定义与假设不同的地方在于定义是不肯定也不否定某物存在的一种命题，只确定某物究竟是什么，而假设确定某物存在，例如，"1是存在的"就是一个假设。

2．普遍原理或公理，这是无法证明的、具有最大普遍性的命题，它和论题不同的地方是，公理必须事先为每一个研究者所具有。

3．公设，这是需要证明、但甚至违反研究者的意见而不经证明就被采用的命题。

在这些出发命题的基础上，就可以进行定理的推演了。亚里士多德所阐明的证明原理奠定了公理方法的基础。

欧几里得继承了希腊古典时期丰富的数学遗产和亚里士多德

---

①Posteriori Analyiics, 71b20-25.
②同上，72°18-20。
③同上，72°5-25, 71°14-24, 73°10-34。

的公理方法理论，在数学发展史上写出了流芳百世的《几何原本》。

《几何原本》中材料的主要来源一般都能查到。欧几里得曾在柏拉图学园学习，他的大部分材料无疑得自柏拉图学派。据注释家普罗克洛说，欧几里得把欧多克斯的许多定理收入《几何原本》中，完善了柏拉图派学者关于正多面体最多只有五种的定理，并对前人只有不严格证明的结果作出无懈可击的论证。欧几里得陈述证明的形式,在上述奥托尼克的《论运动的球》一书里已可看出。欧几里得采用了亚里士多德把公理和公设区别开来的说法，采纳了亚里士多德的一些定义、公理和定理，等等。尽管欧几里得从前入书里采用了许多材料但他不失为大数学家，从《几何原本》的逻辑次序来看，对公理的选择，把定理排列起来以及一些定理的证明，都是欧几里得作出的，著名的平行公设也是他提出的。总之，《几何原本》一书把亚里士多德初步总结出来的公理方法应用于数学，特别是几何学，整理、总结和发展了希腊古典时期的大量数学知识，在数学发展史上树立了一座不朽的丰碑。这本书标志着公理学的产生，是实质公理学的典范。

《几何原本》共13卷,内容包括直边形和圆的性质、比例论、相似形、数论、不可公度量的分类、立体几何和穷竭法等。以下是《几何原本》的定义和公理。①

第一卷开始就列出了书中第一部分所用概念的23个定义，其中最重要的有：

1. 点是没有部分的那种东西。

2. 线是没有宽度的长度。

线这个字指曲线。

3. 一线的两端是点。

这定义明确指出一线或一曲线总是有限长度的。《几何原本》里没有伸展到无穷远的一根曲线。

①参看克莱因：《古今数学思想》第一册第四章，上海科技出版社1979年版。

4．直线是同其中各点看齐的线。

与定义3的精神一致，欧几里得的直线是我们所说的线段。

5．面是只有长度和宽度的那种东西。

6．面的边缘是线。

所以面也是有界的图形。

7．平面是与其上直线看齐的那种面。

15．圆是包含在一（曲）线里的那种平面图形，使其从其内某一点连到该线的所有直线都彼此相等。

16．于是那个点便叫圆的中心（简称圆心）。

17. 圆的一直径是通过圆心且两端终于圆周的任一直线，而且这样的直线也把圆平分。

23．平行直线是这样的一些直线，它们在同一平面内，而且往两个方向无限延长后在两个方向上都不会相交。

公设（只应用于几何）如下：

1．从任一点到任一点作直线［是可能的］。

2．把有限直线不断循直线延长［是可能的］。

3．以任一点为中心和任一距离［为半径］作一圆［是可能的］

4．所有直角彼此相等。

5．（平行公设）若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必相交于该侧的一点。

普通观念（即公理）有：

1. 跟同一件东西相等的一些东西，它们彼此也是相等的。

2．等量加等量，总量仍相等。

3. 等量减等量，余量仍相等。

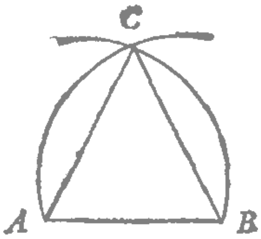
4．彼此重合的东西是相等的。

5. 整体大于部分。

下面我们看几个定理的推演。

命题1在给定直线上作一等边三角形。

以A为中心，以AB为半径作圆。以B为中心，以BA为



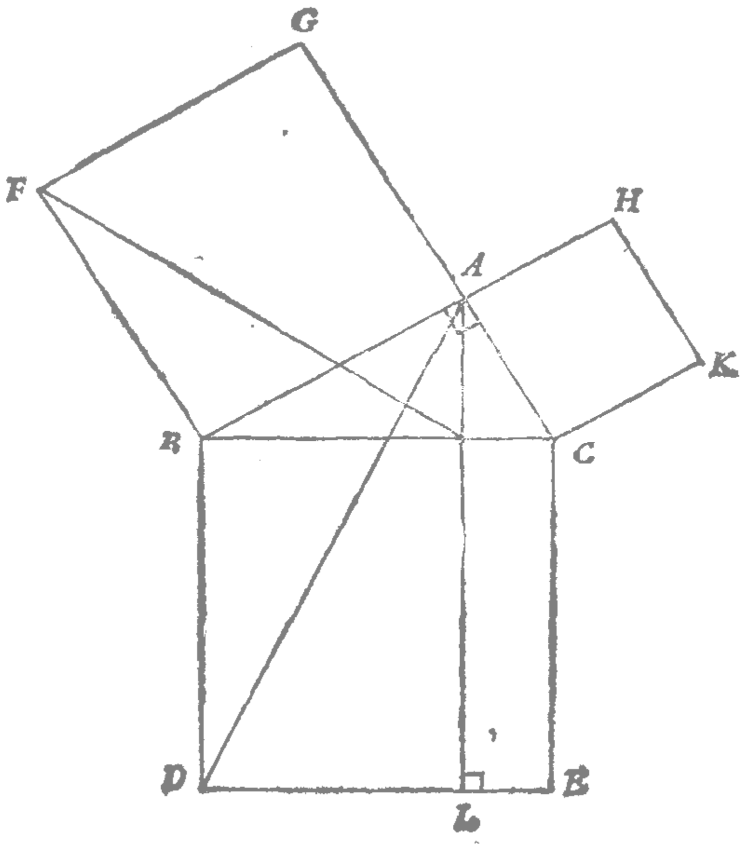
半径作圆。设C是一个交点，△ABC便是所求的三角形。

命题4．若两个三角形的两边和夹角对应相等，它们就全等。

证法是把一个三角形放到另一个三角形上，指明它们必然重合。

命题47 直角三角形斜边上的正方形等于两直角边上的两个正方形之和。

这就是毕达哥拉斯定理（勾股定理）。证明是用面积来做的。我们可证出△ABD≌△FBC，矩形BL=2△ABD，正方形GB=2△FBC。于是矩形BL＝正方形GB。同样有矩形CL=正方形AK。



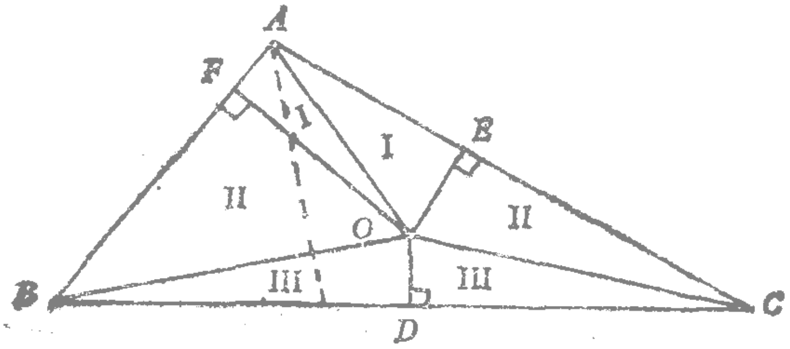
这个定理还告诉我们怎样作一正方形，使其面积为所给两正方形面积之和，即求x使$x^2=a^2+b^2$。这是几何代数方法的一个实例。

《几何原本》共推导出467个定理，这里不一一赘述。《几何原本》是一部内容丰富的数学书，千百年来为人们所使用，对人们掌握数学知识，了解公理方法，起了巨大的作用。但是，《几何原本》还很不成熟，其中存在许多严重缺点。第一是用了重合法（这是根据公理4的一个方法）来证全等（例如命题4）。这个方法有两点值得怀疑：一是用了运动的概念，而这是没有逻辑根据的；二是默认图形从一处移动到另一处时所有性质保持不变，要假定移动图形而不致改变其性质，那就要对物理空间假定很多的条件。《几何原本》的第二个严重缺点是定义不够恰当。开头关于点、线、面的定义没有明确的数学含义，其实这些概念应当是不定义的初始概念。有些定义，例如定义17应用了没有加以定义的概念"圆周"。有些概念的定义含糊不清，如第五卷比例论中的一些定义。第三个缺点是引用了从未提出而且并未发觉的假定。例如，在命题1的证明里假定了两圆有一公共点。每个圆是一个点集，很可能两圆彼此相交而在假定的点或所谓交点（一个或两个）处没有两圆的公共点。第四个缺点是证明不够严格。有些证明搞错了，需要纠正；有些地方需要给出新的证明。有些证明只用特例或所给数据（图形）的特定位置证明一般性的定理，这也需要重新证明。

《几何原本》的缺点集中到一点，就是没有能够区分感性直观与科学抽象，对感性直观过分依赖，因而缺乏数学的严格性。这里我们可以举一个例子：

[例题] 每一个三角形都是等腰的。

[证明] 设△ABC是任一个三角形。作角BAC的平分角线，并作BC边的垂直平分线。如果这两条线平行，则角BAC的平分角线垂直于BC，因此这个三角形是等腰三角形。如果这两条线不平行，交于O点，则由O分别作AB和AC的垂线，垂足分



别为F和E。由此可得：标号为I的两个三角形全等，OF=OE；标号为III的两个三角形也全等，OB==OC。因此，标号为II的两个三角形全等，FB=EC。又据标号为I的两个三角形全等，可得AF=AE。故AB=AC，即△ABC是等腰的。

根据《几何原本》，是不能发现这个证明的错误的。它的错误在哪里呢？这只有经过一番仔细的、严密的逻辑分析才能发现。问题产生于O点的位置一般说来总是在△ABC的外面而不是它的里面。由此就揭露出《几何原本》对顺序关系的处理是不严格的，它没有严格的顺序公理，没有严格规定"…在…中间"这个概念。这一点是经过了许多数学家的努力，特别是希尔伯特1899年的《几何基础》加以概括和总结的一个成果。

在实质公理学向形式公理学的发展过程中，有一个过渡阶段。下面我们就来考察这一阶段。

二、第二阶段——从实质公理学向形式公理学的过渡（概括公理学）：非欧几何和射影几何

如果把欧氏几何中的其他公设和公理保持不变，只把第五公设（平行公设）改换为与其相反对的公设，那么所得到的几何系统就称为非欧几何。

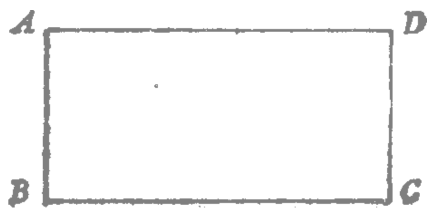
非欧几何的建立经过了一个曲折而漫长的过程，它产生于对平行公设的研究。在《几何原本》中，平行公设缺乏象其他公理和公设那样的说服力，并不自明。它要求直线"无限延长"，因而引起

了人们的怀疑：第一，一条直线是否能无限延长？第二，如果二直线无限延长，可否既不平行又不相交，而是无穷地接近？因此，平行公设是否正确地反映了空间形式的性质，这是需要进一步解决的课题。

从希腊时代到公元18世纪有两种研究途径。一种是用更为自明的命题来代替平行公设。有些数学家提出了一些公理，在直观上似乎比平行公设更为自明。但是，通过进一步的检查可以看出，这些代替公理并不真正令人满意。有些人作的论断，是关于发生在空间无限远之外的事。例如，要求作一圆通过不在一直线上的三点，当这三个点趋于共线时圆愈来愈大。另一方面，那些并不直接包含“无限远”的代替公理（例如，存在两个相似而不相等的三角形这样的公理），看来是更复杂的假设，并不比欧几里得的平行公设更好。

解决平行公设的第二种办法是，试图从欧几里得的其他九个公理和公设推导出平行公设来，如果能做到这一点，那么平行公设就将成为定理，它也就无可怀疑了。推导可用直接证法或间接证法。有的数学家曾试过直接证明，当然没有成功。间接证法是从与平行公设相反对的假设出发，如果这些假设都导致矛盾，即根据归谬法这些假设都不能成立，那么平行公设就是唯一可以接受的了。

1733年，意大利数学家萨克里(Saccheri，1667—1733）出版了《欧几里得无懈可击》一书。萨克里在书中讨论了三种假设，试图证出平行公设。为了证明的方便，他考虑的不是欧几里得对平行公设的陈述，而是它的等价形式。他从一个四边形开始。从直线BC的两个端点，在同一侧作两条等长的垂直线AB和CD，连结AD，结果得到四边形ABCD.



其中角B和角C必定相等。可以证明，平行公设等价于“角B和角C是直角”，这又等价于“平面上通过不在已知直线上的一点，只能有一条直线与已知直线平行”。萨克里考虑了其他两个可能的与平行公设相反对的假设：(1)角B和角C都是锐角，这等价于“通过已知直线外一点，不只有一条直线与已知直线平行”(2)角B和角C都是钝角，这等价于“通过直线外一点，不存在与已知直线平行的直线”。这两个假设分别相应于后来的双曲线式非欧几何(罗巴切夫斯基几何)和椭圆式非欧几何(黎曼几何)。①萨克里在研究的过程中实际上已证明了这两种几何的特有的定理。例如，他根据锐角假设，证明了三角形三内角之和小于二直角，根据钝角假设，证明了三角形之内角之和大于二直角。但是，萨克里在证明钝角假设和锐角假设不能成立时，所用的推理是有漏洞的，因此他的证明计划也归于失败。萨克里的工作实际上告诉了我们：平行公设是不可证的，他已实际上引出了两种非欧几何的平行公理和一些定理，这就说明欧氏几何不是唯一的几何，非欧几何是可能的。

萨克里的著作引起了德国著名数学家高斯(Gauss)的注意，他在1820年左右已经得到许多非欧几何的定理；他相信非欧几何不矛盾并且可以有应用；现在所用的非欧几何这个名称就是他定的；但他生前没有发展这方面的著作。第一次公开发表的非欧几何的文献是19世纪20年代俄国数学家罗巴切夫斯基(Lobachevsky, 1793—1856)的论文，其后匈牙利数学家波里埃(Bolyai, 1802—1860)于1832年发表了他的关于非欧几何的见解。高斯、罗巴切夫斯基和波里埃所研究的是锐角假设的双曲线式几何，因罗巴切夫斯基的著作发表最早，因此这种几何现在通称为罗氏几何。

罗巴切夫斯基是喀山大学数学和物理学教授。他研究平行线

①双曲线有两个无穷远点，椭圆没有无穷远点。罗氏几何的直线有两个无穷运点，黎氏几何的直线没有无穷远点，此种情形恰与双曲线、椭圆相似。

是从1815年开始的，从1823年以后就研究他的新几何学了。1826年,他在喀山大学数理学会发表演讲,题为《几何学原理大纲》这个大纲提出了一种新几何学，他称之为"虚几何学"。他在演讲中说，虚几何学要比欧氏几何来得广博，其主要原理是：通过已知直线外一点可作两条直线与已知直线平行；三角形内角之和小于两直角。1829—1830年,罗巴切夫斯基发表了论文《几何原理》,对从前的大纲进行了增补。

到了1854年，德国数学家黎曼(Riemann, 1826—1866)提出了另一种非欧几何，既钝角假设的椭圆式几何，其平行公理换为":通过已知直线外一点,不能作一直线与已知直线平行",即同在一平面上的两直线，至少有一点是公共的"。同时，在黎曼几何中,对欧氏几何的直线可以无限延长'的规定改为直线的长是有限的,但是无止境的",这就是说,黎曼几何中的直线就好象球面上的大圆一样，它的长是有限的，如果要沿着它向前进，就可以永远地向前走而永无止境。

非欧几何建立之后，一个亟待解决的问题是它们的一致性；在罗氏几何和黎曼几何中，大量的推演没有产生矛盾，不过要是再继续推演下去，是否仍不发生矛盾呢？

罗巴切夫斯基和波里埃曾经证明双曲线式几何学的平面三角公式，同欧氏几何里虚球面的三角公式是一样的；所以，如果欧氏几何的球面三角公式，无论如何推演，始终是一致的话，那么欧氏几何的虚球面三角公式也应当是一致的，因而双曲线式几何也是一致的。他们二人奠定了用模型方法进行相对一致性证明的基础。

意大利数学家贝特拉米(Beltrami, 1835—1990)于1868年发现了可以用伪球面作为罗氏几何的平面有限部分的模型，伪球面是欧几里得空间的一个曲面，由一条特殊的曲线绕渐进线旋转而成，在伪球面上的一个图形可以移动并适当弯曲使之与曲面吻合，正如同一个平面图形可以弯曲使之与圆柱面吻合一样。贝特拉

米的这一成果第一次在欧几里得空间用具体的面来表示非欧几何，证明了：如果欧氏几何是一致的，那么伪球面上的几何就是一致的；如果伪球面上的几何是一致的，那么罗氏平面几何就是一致的；所以，如果欧氏几何是一致的，那么罗氏平面几何就是一致的。这就是说，罗氏平面几何相对于欧氏几何是一致的。贝特拉米于1868—1869年又提出用球面作为黎曼的二重椭圆几何（在这种几何中两个点并不总是确定唯一的直线）的模型，球面相当于二重椭圆几何的平面，球面上的大圆相当于二重椭圆几何的直线，两个大圆平面间夹角相当于二重椭圆几何的两条直线间夹角。若在二重椭圆几何内有矛盾，则在球面几何内也必然有矛盾。现因球是欧氏几何的一部分，故若欧氏几何是一致的，则二重椭圆几何也必然如此。德国数学家克莱茵(Klein, 1849—1925）在1871年对黎曼的单重椭圆几何（在这种几何中两个点永远确定唯一的一条直线）给出了一个曲面模型，这是个半球面，包括其边界。贝特拉米和克莱茵还为罗氏几何建立了新的模型，这个模型是不包括圆周的圆内部（称为罗氏平面),圆内部的点、弦、角与其他图形满足罗氏几何的公理，罗氏几何的定理也可应用于圆内部的图形。在这个模型中，罗氏几何的公理和定理实际就是欧氏几何中对于一些特殊图形与概念（例如，由罗氏几何方式定义的距离）的论断。因为所说的这些公理与定理能应用于当作属于欧氏几何的图形与概念，所以所有罗氏几何的论断都是欧氏几何的定理。于是，如果在罗氏几何中有矛盾的话，则这个矛盾将是欧氏几何之内的矛盾；因而如果欧氏几何是无矛盾的（一致的），则罗氏几何也一定是无矛盾的（一致的）。这样，罗氏几何的一致性就归结为欧氏几何的一致性。彭加勒（Poincare)后来在1882年独立地给出另外一个模型，也建立了罗氏几何的相对一致性。

非欧几何的建立在数学发展史上具有划时代的意义，它迫使数学家们从根本上改变对数学的性质的理解，以及数学和物质世界的关系的理解，并引出关于数学基础的许多问题。非欧几何彻

底推翻了两千年来流行的一种形而上学观念，即认为欧氏几何是唯一的与必然的。非欧几何的建立标志着人们对空间形式的认识发生了飞跃，从直观的空间上升到抽象的空间，使得人们认识到区分感性直观与科学抽象的重要性，根本动摇了认为几何公理能够凭其表面的自明性而成立的传统观念。虽然从表面上看，非欧几何的平行公理及有关定理是违反人们的直观的，但是数学家们在欧氏几何中找到了非欧几何的模型，这就表明，非欧几何同欧氏几何一样，都是现实的空间形式的科学抽象，只不过它们反映着现实空间的不同范围和方面，正因为如此，非欧几何在科学中，例如在爱因斯坦的相对论中，得到了广泛的应用。

非欧几何的建立，使公理方法得到了重大发展，突破了实质公理学的局限性，这表现在以下几方面：

1．非欧几何诞生的第一步就在于认识到：平行公设不能在其他九条公理和公设的基础上加以证明。这就是说，它是独立的命题，所以可以采用一个与它相反对的公理并发展成为全新的几何。推而广之，在一个公理系统中，我们可以把一个具有独立性的公理换成另外的公理而得到一个新的公理系统。这是现代的一种重要公理方法。

2．非欧几何的建立深刻地启示人们，可以证明‘ 在一个给定的公理系统中某些命题不可能证明”。后面所要介绍的哥德不完全性定理就是证明‘ 在形式算术系统中某些命题不可能证明”。

3．用模型方法建立了非欧几何相对于欧氏几何的一致性。

4．非欧几何已经不是象《 几何原本》那样的依赖于感性直观的实质公理系统。非欧几何的建立标志着从实质公理学向形式公理学的过渡，表明人们的认识已从直观空间上升到抽象空间。用模型方法证明非欧几何的相对一致性，破除了“ 一个公理系统只有一个论域（ 模型） ”的传统观念。从证明非欧几何相对一致性的过程中，我们可以得到这样的启迪：只要容许对一个公理系统作不同的解释，找不同的模型，那就实际上把它看成是一个不与任何特定

对象域相结合的形式公理系统了。为了表明非欧几何在公理学发展中的这种过渡性质，我们把它们叫做概括的公理学。下面讲的射影几何也具有这样的性质。

经过射影而不变的空间性质叫做射影性质，研究射影性质的几何叫做射影几何。经过射影而改变的空间性质叫做度量性质，研究度量性质的几何叫做度量几何。欧氏几何和非欧几何都是度量几何。

17世纪以来，许多数学家对建立和发展射影几何做了许多工作。19世纪50年代至70年代，一些数学家已经在射影性质的基础上来陈述和定义度量性质—— 角度和长度。这就说明射影性质在逻辑上是更基本的。这里值得一提的是克莱茵的研究工作，他证明了如何能从射影几何导出度量几何来。他的工作表明，欧氏几何和非欧几何可以看成是射影几何的特例或子几何。他的工作弄清了射影几何的基本地位，铺平了公理化发展的道路，使得后来的研究能从射影几何出发并由它推出几种度量几何。

射影几何公理化基础的纯逻辑的探讨及对射影几何与子几何关系的研究，后来是由德国数学家帕什（ Pasch）进行的。帕什在1882年的《 新几何讲义》中给出了第一个严格的射影几何系统，而欧氏几何和非欧几何都是特例。他把点、线、面和线段的全等作为不定义概念，这已是形式公理学的做法。他第一次提出了关于“ 在…之间 ”关系的一组顺序公理。另一方面，帕什从理论上提出了形式公理学的思想。他说：“ 如果几何学要成为一门真正演释的科学，那么必不可少的是：作出推论的方式既要与几何概念的意义无关，又要与图形无关；需要考虑的全部东西只是由命题和定义所断言的几何概念之间的关系。 ”①他明确提出，一个公理系统必然要有在本系统里不定义的概念，通过这些概念就可给其他概念下定义；不定义概念的全部特征必须由公理表达出来。这实际

① 转引自克莱因：《 古今数学思想》（ 第四册），上海科技出版社1981年版，第78页。

上就是说，公理是不定义概念的隐定义。帕什认为，有些公理虽然是由经验所提出来的，但当选出一组公理之后必须不再涉及经验和概念的物理意义而有可能完成证明，公理决不是自明的真理，而是用以产生任一特殊几何的假定。概念和公理虽然涉及经验，但这一点在逻辑上是不相干的。除了公理之外，如果还有与推导有关的性质，这就等于说，公理还不完全，还没有完全公理化。帕什的这些看法精确地表述了形式公理系统的特征。

由上可见，随着两种几何之间关系的深入研究和射影几何公理系统的建立，形式公理学的概念已逐渐成熟，为希尔伯特写出《几何基础》创造了条件。

三、第三阶段——形式公理学《几何基础》

希尔伯特1899年的《几何基础》是形式公理学的奠基著作，它不但给出了欧氏几何的一个形式公理系统，而且具体地解决了公理方法的一些逻辑理论问题。

1898—1899年冬，希尔伯特在哥廷根大学讲授几何，其讲稿就是后来出版的《几何基础》。他对几何研究的兴趣是受了数学家魏纳（H Wiener）的影响。1891年，希尔伯特还是在做讲师的时候，曾在哈勒听过魏纳的一个讲演，内容是关于几何基础与结构的。魏纳提出要建立关于点和线的联结和切割的一种抽象科学，要只从包括有这些元素和关系的前提推导出定理。魏纳对几何实质的抽象观点深深地启发了希尔伯特，他在返回哥尼斯堡的路上，在柏林车站对另外两位数学家说：在一切几何命题中，“我们必定可以用桌子、椅子和啤酒杯来代替点、线、面。”①这句话朴素地表达了希尔伯特的形式公理思想。他采用了帕什关于不定义概念以及这些概念由公理隐定义等思想，认为不需要赋予不定义概念以明确涵义，所谓“用桌子、椅子和啤酒杯来代替点、线、面”也就是这个

---

①瑞德著：《希尔伯特》，袁向东等译，上海科技出版社1982年版，第72页，

意思。他认为，如果几何是研究“事物”的，那么公理确实不是自明的真理，而必须看成是任意的，尽管事实上它们是由经验所提出的。这就是说，公理应当脱离直观，要从经验进行科学的抽象，公理所表述的关系，对“点、线、面”，或“桌子、椅子和啤酒杯”，都可以成立。

为了揭示几何学的实质，为了使人们理解形式公理学的精神，希尔伯特的《几何基础》采用了独特的方法——把形式公理学的抽象观点与具体的传统几何语言创造性结合起来的方法。他用旧瓶装新酒，在欧氏几何的框架内，提出了崭新的形式公理学观点。对这种方法，他后来的一位学生说道：“只有少数目光敏锐的人在朦胧中探路前进，透过这灰暗的背景，忽然出现一片光明。”对于以《几何原本》为入门书的成名数学家来说，希尔伯特的著作更富有吸引力，“人们仿佛看到了一副非常熟悉但却变得更加崇高的面孔”。②

希尔伯特首先列出不定义概念。它们是点、线、面，在…之上（点和线之间的关系），在…上（点和平面之间的关系），在…之间，点偶的叠合，角的叠合。

公理分为五组。第一组公理包含关于存在的公理。

Ⅰ、联结公理

I_1. 给定两点 A 和 B，总有一条线 a 在 A 和 B 之上。

I_2. 给定两点 A 和 B，至多有一条线在 A 和 B 之上。

I_3. 每一条线至少有两个点。至少存在三个点不在一条线上。

I_4. 对不在一条线上的任意三个点 A、B 和 C，有一个平面 α 在这三个点上[包含这三个点]。每一个平面[至少]有一个点。

I_5. 对不在一条线上的任意三个点 A、B 和 C，至多有一个平面包含这三个点。

I_6. 如果一条线上的两个点在平面 α 上，则线上的每一个点在

② 同上，第 77 页。

α上。

I_7 如果两个平面α和β有一个公共点A，则它们至少还有一个点B是公共的。

I_8 至少有四个点不在同一平面上。

II、顺序公理

II_1. 如果点B在点A和点C之间，则A，B，C为一条线上的三个不同的点，且B也在C和A之间。

II_2. 对任意两点A和C，至少有一个点B在AC上，使得C在A和B之间。

II_3. 一条线上的任意三个点之中至多有一个点在其他两点之间。

公理 II_2 和 II_3 等于说线是无穷长的。

定义。令A和B是一条线a上的两点。点偶A，B或B，A称为线段AB。在A和B之间的点称为线段的点或线段内部的点。A和B称为线段的端点。线a上的其他所有点称为线段的外部。

II_4.（帕什公理）令A，B和C是不在一条线上的三点，并令a是平面ABC[由公理 I_4 通过A，B，C可作一个平面]上的任一线，但不通过A，B或C。如果a通过线段AB的一个点，则它也通过线段AC的一个点或线段BC的一个点。

第二组公理是《几何原本》所没有的。

III、叠合公理

III_1. 如果A，B是一条线a的两点，A′是a或另一条线a′的点，则在线a或a′上A′的一侧可找到一个点B′，使得线段AB叠合于A′B′。记为AB≡A′B′。

III_2. 如果A′B′和A″B″叠合于AB，则A′B′≡A″B″。

这条公理把欧几里得的“跟同一件东西相等的一些东西，它们彼此也是相等的”限于线段。

III_3. 令AB和BC是在一条线a上的两个线段，它们除B

点外无其他公共点，并令A′B′和B′C′是一条线a′上的两线段，它们除B′外无其他公共点。如果AB≡A′B′和BC≡B′C′，则AC≡A′C′。

这条公理把欧几里得的“等量加等量，总量仍相等”应用于线段。

III₄. 令∡(h，k)为平面α上的一个角，线a′在平面α′内并且给定α内a的某一侧。令h′是由O′引的a′的射线。于是在平面α内有一条并且仅仅有一条射影k′使得∡(h，k)叠合于∡(h′，k′)，并且∡(h′，k′)的所有的内部点都在a′的给定一侧。每一角叠合于自身。

III₅. 如果对两个三角形ABC和A′B′C′，我们有AB≡A′B′，AC≡A′C′和∡BAC≡∡B′A′C′，则∡ABC≡∡A′B′C′。

IV，平行公理（欧几里得公理）

在一个平面上设a是一条线，A是不在a上的点。于是过A点至多有一条线不与a相交。（过A点至少存在一条线不与a相交，这是可以证明的，因此在这条公理中就不需要了。）

V、连续公理

V₁（阿基米得公理）如果AB和CD是任意两线段，则在线AB上存在一些点A_1，A_2，…，A_n，使得线段AA_1，A_1A_2，A_2A_3，...，$A_{n-1}A_n$叠合于CD，并使得B在A和A_n之间。

V₂（线性完全性公理）一线上的点形成一个点集，满足公理I₁，I₂，II，III和V₁，这个点集就不能再扩展为更大的点集继续满足这些公理。

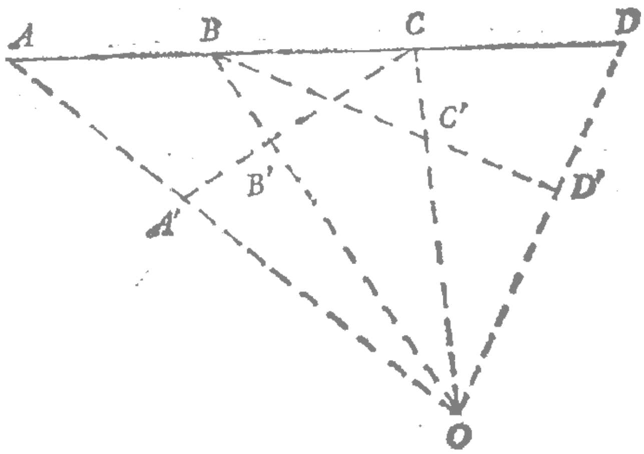
这条线性完全性公理等于说，要求线上的点集和实数有一一对应。

第五组公理也是《几何原本》所没有的。

根据以上的五组公理就可严格推演出欧氏几何的一切定理。下面我们看一个关于顺序的定理，这个定理的证明若没有顺序公

理是不行的。

例（定理）．假设A, B, C, D是直线上任意的四点，于是：(1)若C在A、D之间，B在A、C之间，则C在B、D之间，B在A、D之间；(2)若C在B、D之间，B在A、C之间，则C在A、D之间。



证明．由公理I₃，在AD直线外至少有一点存在，现在命此点为O，联结OA, OB, OC, OD。由公理II₂，在O、A之间至少有一点存在，现在命此点为A′。同理，O、D之间至少有一点D′，联结（CA′）和（BD′）[加上圆括号表示线段]。

假设（CA′）通过A点，则由公理I₁和I₂，C A′与CA成为一条直线，而A′在直线CA上面。若A′在直线CA上面，于是AA′与CA也成为一条直线，而O点也在直线CA上面；但是原设O点不在直线CA上面，所以CA′不能通过A点。同理，CA′也不能通过B点或D点，更不能通过O点。再依同样理由，可知（BD′）不能通过A, C, D或O点。

原设B点在A、C之间，并且由上面证明（CA′）不通过A, B, O各点，也不能再与（AB）相交；所以由公理II₄可知（CA′）必与（BO）相交，设此交点为B′。现在把公理II₄应用于O, A, D三点及直线CA′；可知CA′已经通过（OA）及（AD），不能再通过（OD）。再把公理II₄应用于O, B, D三点及直线CA′，

于是因为 CA' 不能通过 O, B, D 各点，也不通过（OD），所以 CA' 必与（BD）相交于一点 C，即原设的一点 C，所以 C 点在 B、D 之间。

由上面的证明，可知 C 点在 B、D 之间；所以由公理 II_3，B 点不能再在 C、D 之间，即 BD' 不与（CD）相交。现在把公理 II_4 应用于 O, C, D 三点及直线 BD'；则直线 BD' 必定通过（OC），设通过（OC）之点为 C'。于是再把公理 II_4 应用于 O, A, C 三点及直线 BD'，可知 BD' 不通过（OA）；又应用于 O, A, D 三点及直线 BD'，可知（BD'）与（AD）相交，但是（BD'）与（AD）相交只能有一点，所以这个交点就是原设的 B 点，所以 B 点在 A、D 之间。如此，本定理第一部分证毕。同理可证第二部分。

上述定理在原来的欧氏几何中是无法严格证明的。由此也可看出，希尔伯特的几何系统克服了原先欧氏几何的缺陷。

希尔伯特的《几何基础》在严格地构成了欧氏几何的系统之后，立即对系统的性质进行了研究。他首先证明了欧氏几何的相对一致性，使用的是模型方法。第一步取一个数域 Ω，它是由以下的一切代数数组成：这样的代数数是从数 1 开始，有穷多次应用加、减、乘、除四种有理数运算和第五种运算 $|\sqrt{1+\omega^2}|$（ω 是用五种运算已获得的任一数）所得到的。点是在 Ω 中数的有序对 (x, y)，线是一组比例 $u: v: w$（其中 u 和 v 不是同时为 0），如果 $ux+vy+w=0$ 则点在线上，叠合用解析几何中的平移和旋转的表达式加以代数的解释，如此等等。在此基础上，希尔伯特构造了一个模型，使应用于平面几何的除 V_2 外的一切公理皆是真的，同样的方法也可推广到立体几何。在构造了这个模型之后，他又构造了另一个模型，用实数域代替有限制的数域 Ω，这样这个模型同通常的笛卡尔解析几何是一致的。在这个模型中，所有的公理（包括 V_2）都是真的。如果从几何公理可推出矛盾，那么在实数算术中用纯算术推理也要推出矛盾。这就证明了：如果实数算术是一致的，则欧氏几何也是一致的。

从希尔伯特的相对一致性证明中，我们可以清楚地看到，他所构造的欧氏几何系统是一个形式公理系统。初始概念点，线，面，在…上，叠合等是不加定义的，没有被赋予明确涵义，公理是这些初始概念的隐定义，表达了这些初始概念之间的关系结构。正因为如此，这个公理系统才可以有各种不同的模型。因此，希尔伯特的《几何基础》不是把欧氏几何看成仅仅是有关几何题材的命题所构成的系统，而是把它看成是关于关系结构的条件所构成的系统。关系结构完全是抽象的东西，是形式公理学的直接对象。

希尔伯特在证明了欧氏几何的相对一致性之后，接着证明了公理的独立性。他仍然使用了模型方法。他用克莱茵的一个非欧几何模型证明了平行公理的独立性。在这个模型中，平行公理为假，而其他四组公理为真。这就是说，平行公理不能由其他四组公理推出，即平行公理是独立的。因为如果平行公理可从其他四组公理推出，那么作为欧氏几何一部分的模型就会有矛盾的性质：平行公理是真的，又是假的。其他四组公理的独立性证明是通过构造其他的模型。例如，为了证明叠合公理III，的独立性,他修改了立体解析几何的‘距离”定义，不用毕达哥拉斯定理所导出的公式，而用以下公式：

$$\sqrt{[(x_1-x_2+y_1-y_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]},$$

在这样的几何(’模型)中，III_5 为假，而其余公理皆为真。

综上所说，希尔伯特《几何基础》的出版是公理方法发展史上的里程碑，它吸收了非欧几何和射影几何的优秀成果，扬弃了欧几里得几何的缺陷，在公理学史上发生了一个质的飞跃，产生了全新的形式公理方法。

希尔伯特的著作一经出版，立刻得到国际数学界的注意，引起巨大反响。彭加勒认为这是一部经典著作：“当代有些几何学家觉得：在承认以否定平行公设为基础的可能的非欧几何方面，他们已经达到了极限。如果他们读一读希尔伯特教授的这部著作，那么这种错觉就会消除，在这部著作中，他们将会发现：他们作茧

自缚的屏障,已经被彻底冲垮了。”一位美国评论家说‘:希尔伯特著作所涉及的原理，这方面知识的广为传播，对于一切科学的逻辑处理，并且一般地说对于清楚的思维与写作，都将产生更巨大的效果。”根据麦克斯·戴恩(一位听过希尔伯特原讲演的学生)的看法，在希尔伯特这部著作所产生的影响中，最有决定意义的是‘那种特殊的希尔伯特精神……这就是：把逻辑力量与创造活力结合起来；藐视一切陈规旧俗；用一种几乎是康德哲学的意向将本质的东西转化成它的反题；最充分地运用数学思想的自由等等！”①

《几何基础》一书出版之后，形式公理方法得到进一步发展。《几何基础》虽然建立了一个形式公理系统，发展了非欧几何的模型方法，证明了系统的相对一致性和独立性，但是它还不是一个完全形式化的公理系统(形式语言系统或形式系统)：在形式公理系统中,概念没有完全符号化,逻辑概念(例如,联结词“如果……那么”)还有意义；公理和定理还不是符号公式，而具有某种关系结构；从公理到定理的推演，例如上面所举的关于顺序关系的一个定理,还是按照逻辑规则(例如,假言推理规则)进行的逻辑推理,而不是公式的变形。完全形式化的公理系统就是形式语言系统(简称形式系统),在其中,概念都成了符号,命题都成了公式,推演都成了公式的变形，一切意义全都抽象掉了，只有在语义解释以后才能获得意义。

由上所说，形式公理学还需要进一步发展，还需要建立关于形式系统的理论。这一伟大的历史性任务还是由希尔伯特完成的，他奠定了以形式系统为研究对象的元数学或证明论的基础。

第二节　证明论的建立

希尔伯特的证明论思想有一个发展过程，1904年开始形成，

①引自瑞德着:《希尔伯特》，第79—80页。

至20世纪20年代基本成熟，在数理逻辑发展史上被称为“希尔伯特纲领”或“希尔伯特计划”。

一、希尔伯特的元数学——证明论纲领

1904年，希尔伯特在海德堡第三届国际数学家大会上作了题为《论逻辑和算术的基础》的讲演。在讲演中，他批评了当时关于算术基础的各种观点，提出用他的公理化方法可以为数概念提供一个严格的而又完全令人满意的基础。他说：“算术常常被看成是逻辑的一部分，当我们要解决建立算术基础这个问题对，往往预先假定了传统的逻辑基本概念。但是如果我们深入考察，那么就会认识到：在我们对逻辑规律进行传统的说明中，即已用到某些基本的算术概念，例如，集合的概念，甚至在某种程度上用到了数的概念。于是我们发现自己陷入了某种循环，这就说明，如果我们想要避免悖论，那就必须在某种程度上同时开展对逻辑规律和算术规律的研究。”①研究的方法就是公理方法。希尔伯特在讲演中第一次提出应该把证明本身也作为研究对象的思想。②他在讲演中试图证明算术的一致性，提出了一般的方法：通过证明初始公式（公理）具有某种性质并且推演规则传递这个性质从而证明某类的所有公式都有这个性质。这个性质现在被称为“齐次性质”。

1904年以后，希尔伯特并没有进一步贯彻他的设想，把主要精力放在积分方程和物理学等方面。从1917年发表《公理化思维》开始，希尔伯特才转到数学基础问题方面。在这篇讲演中，希尔伯特提出了与数论和集合论的一致性相联系的几个重要问题：每一数学问题的原则可解性问题；给数学证明找到一个简单标准的问题；数学中的内容与形式化的关系问题；一个数学问题可否通过有穷步骤加以判定的可判定性问题。希尔伯特认为，这些问题构成了一个应该加以研究的领域，要进行这一领域的研究就必须

①F. G. p. 131。
② 同上，p. 137。

探讨数学证明的概念。这篇讲演勾画了证明论的总目标，但并未确定具体的研究方法。

1922年，在汉堡的一次会议上，希尔伯特发表了《数学的新基础》的讲演。他承认，由集合论的悖论所引起的事态是不能允许的，但他要改变魏尔（原为希尔伯特的学生，后来赞成布劳维尔的直觉主义）和布劳维尔"通过错误的方法来寻求这个问题的解答"。他说："魏尔和布劳维尔的做法，基本上是走克朗尼克的老路。他们试图这样为数学奠定基础，那就是，一切对他们不方便的都要被抛弃，并且树立一个克朗尼克式的禁令专政。但这就要把我们的科学支解，使它残缺不全；如果我们接受这种改革办法，我们就要冒失去我们最有价值的宝藏一大部分的危险。魏尔和布劳维尔驱逐了无理数、函数、还有数论函数的一般概念，康托尔的高次数类等等。'在无穷多个整数中总有一最小者'，这个命题，甚至在判断中，例如在'或者只有有穷多个质数或者有无穷多个'中的逻辑排中律，这些命题和推论规则都在被禁止之列。"①对于直觉主义解决悖论的计划，希尔伯特是不能接受的。他提出，用符号逻辑的方法将数学定理和证明形式化，构成形式系统，并将形式化的公式和证明当作直接对象，这样我们就可以重新获得布劳维尔和魏尔所要求的数学的客观性，而又可以保存最宝贵的数学财富。希尔伯特在讲演中指出，如何用"有穷方法"来处理数论的一致性，但一般的数学则需要用超穷方法。希尔伯特深信他能够克服新的数学基础危机，并一劳永逸地解决数学基础问题。

1922年，希尔伯特在莱比锡德国自然科学家大会上发表了《数学的逻辑基础》的讲演。他说："构成数学的每件东西现已严格形式化了，使得它变为许多公式。这些公式同普通数学公式的区别只在于：除普通记号或符号外，还引进了逻辑符号，特别是蕴涵号和否定号。作为数学形式系统基石的某些公式称为公理。一

①转引自王宪钧：《数理逻辑引论》第321页，参看瑞德：《希尔伯特》第195页。

个证明是一个格式，它本身必须清楚地呈现在我们面前；它根据推理模式（按：指 $S, S\to T, \therefore T$），由一系列断定组成，这里前提 S，或是一条公理（或一些公理），或是在展开中先已出现的证明格式的结尾公式。一个公式称为可证的，如果它或是一条公理或是一个证明的结尾公式。对于通常的形式化数学而言，在一定意义上要附加一门新的数学，即元数学。……在元数学中，人们处理普通数学的证明,后者成为研究的对象。”①元数学也被称为“证明论”。希尔伯特强调“有穷观点”,他根据有穷观点,对全称量词和存在量词的规则作了新的处理。他提出了以下的“超穷公理”：

$$A(\tau A)\to A(a)\ ,$$

其中，符号 τ 是一个逻辑选择函项，对任一谓词 A 指派一个基准对象 τA，而如果一个谓词 A 应用于基准对象 τA，那么它就应用于所有对象 a。这样，关于全称量词和存在量词的规则化归为超穷公理的应用。证明算术的一致性就是证明在任何形式推演中都有一个数值公式作结尾，而它不同于公式 $0\neq 0$。

希尔伯特1922年的两篇讲演奠定了希尔伯特纲领的基础。他的证明论思想在以后的几次讲演中，得到进一步充实和发展。

1925年的《论无穷》是希尔伯特在明斯特城纪念魏尔斯特拉斯的数学家大会上所作的讲演，是希尔伯特关于数学基础问题的代表作。②他的主要论点是：

1. 必须把逻辑演算和数学证明本身形式化，把用普通语言传达的内容上的数学科学变为用数学符号和逻辑符号按一定法则排列的一堆公式。证明一致性的问题归结为：根据已确立的规则从我们的公理出发,得不出“$1\neq 1$”作为一个结尾公式,因而“$1\neq 1$”是一个不能证明的公式。证明论的问题在于指出，一个具有一定性质的证明是得不到的。一个形式化的证明同一个数字符号一样，

①Hilbert: Die logischen Grundlagen der Mathemarik, Math. Ann. 88 (1923), 151—165。

②载F. G. pp. 367—392。

是一个具体的而又能概观其整体的东西。它自始至终是可报道的。结尾公式所要求的结构“ $1 \neq 1$ ”也是一个可具体确定的证明特性。元数学是关于形式证明的内容上的理论。

2. 有两种无穷：潜无穷和实无穷。潜无穷是一种变化着的、成长着的、被产生出来的东西，例如分析中作为极限概念的无穷大和无穷小。当我们把数 1, 2, 3, 4, …的整体本身看成一个完成的实体或者把一线段上的许多点看成是实际给定的、完成的对象整体，这种无穷称为实无穷。

希尔伯特采用潜无穷的观点，不假定实无穷。他认为，在现实世界中无处能找到无穷，无穷是一种超乎经验之外的理性概念。

3. 康托尔的集合论是数学精神最值得惊叹的花朵，是人类纯理智活动的一个最高成就。 它是关于实无穷的理论。在弗雷格、戴德金和康托尔的大力合作下，无穷被推上了皇位，盛极一时。但恰恰在康托尔的集合论中，出现了灾难性的悖论。希尔伯特指出，有一条完全令人满意的道路，它能绕过这些悖论而不致背弃我们的科学。最主要的是，必须对推理建立起象普通初等数论里所具有的完全一样的可靠性。对于初等数论是没有人怀疑的，那里的矛盾和悖论只是由于不注意才会发生。这就是说，必须采用有穷观点和有穷方法，其特点是：

从有穷观点看来，具有形式“ 存在一个数具有这一或那一特性 ”的存在命题，仅作为部分命题即作为更加精确地确定了的一个命题的一部分时才有意义。例如，“ 这些粉笔之中有一支是红的 ”这个存在命题实际上是“ 这支粉笔是红的，或者那支粉笔是红的，或者…，或者那里的一支粉笔是红的 ”这一命题的简单说法。简单地说，要证明 $\exists x\ A(x)$ ，是给出一个使得 $A(x)$ 成立的 x 或给出找这个 x 的方法。

对于全称命题，例如“ 如果 a 是一个数字，那么我们必有 $a+1=1+a$ ”，我们不能把它理解为一个无穷合取“ $1+1=1+1$ 并且 $2+1=1+2$ 并且…直至无穷 ”，只能理解为一个假言判

断：如果给出一个数字，那么就可断定某些东西。从有穷观点看来，$\forall x A(x)$ 的解释是：对一个数字 n 的任一选择，命题 $A(n)$ 可以证明是真的。

对于如上面所说的、其中出现一个未确定的数字符号的方程，或者可以为每一个数字符号所满足，或者将为一个反例所否定，对这个析取命题，从有穷观点看来，它是不能成立的。也就是说，排中律不能应用于这样的命题，因为这个析取命题是以上述那个方程 $a+1=1+a$ 普遍有效这一命题可予以否定的假定为基础的。对这样的全称命题加以否定得到"有一 a 使得 $a+1 \neq 1+a$，这是一个无穷析取，有穷观点是不承认的。

由上可见，有穷观点实质上是潜无穷理论的具体表现。希尔伯特后来在与贝尔纳斯合著的《数学基础》(第一卷，1934)中对"有穷"作了如下说明："我们将总是把'有穷'一词用来指所涉及的讨论、断定或定义都必须满足其对象可以彻底产生出并且其过程可以彻底进行的要求，因此可以在具体观察的论域中实现。"综上所说，有穷观点或有穷方法有两个主要特点：(1)所谈论的对象是产生出来的，而不仅是假定的；(2)如果定义或推演的过程不能在有穷步骤内终止，那么就不能承认；需要多少步骤，事先可以确定。总之，有穷方法是一种初等的能行的方法。王宪钧教授认为，"它较一般递归为狭"。①王浩教授说"它们大约相当于原始递归算术(自然没有量词)的一个弱扩张"。②

4. 根据有穷观点，有一些传统的逻辑定律不适用了，为了保持这些定律，那么我们应该怎么办呢？那就要用理想元素的方法，给有穷命题附加一些理想命题。根据这种观点，数学将由两类公式组成：一类公式对应着有意义的表述，另一类公式则不表示任何意义，但形成数学理论的理想结构。理想命题以实无穷的存在为前提，把实无穷作为理想元素，排中律成立。但是应用理想元素有

---

①王宪钧：《数理逻辑引论》第324页。

②王浩：《数理逻辑通俗讲话》，科学出版社1981年版，第151页。

一个先决条件，即一致性证明。通过添加理想元素而实现的扩充，只有当扩充以后在原来旧的较狭领域内不发生矛盾，也就是在消去理想结构而对旧的结构所得出的一些关系在旧的领域内总适用的时候，这种扩充才是许可的。

希尔伯特在《论无穷》中还提出了证明康托尔连续统假设的一个纲要，后来发现其中包含一些错误，但这一证明纲要推进了对于递归定义的研究。

1927年7月，希尔伯特在汉堡数学讨论会上发表了《数学基础》的讲演,进一步补充了《论无穷》的一些思想。他详细描述了一个带ε算子（τ算子的对偶算子，相当于一个不定摹状词的符号）的形式系统；对以前提出的证明论基本思想再次作了说明，例如，把普通数学加以形式化，在形式数学系统中包含逻辑演算，要采用理想元素的方法，其先决条件是一致性证明，等等。他明确指出，有两种不同的归纳法——内容上的归纳法和形式归纳法本身；彭加勒混淆了这两种归纳法，用来反对算术一致性的证明。

希尔伯特在讲演中分析了他的证明论计划所受到的种种批评。他指出:“布劳维尔竭力反对的公式游戏（按：指公式之间的形式推导）除有数学价值之外，还有重要的普遍哲学意义。因为这种公式游戏是根据某些确定的、表达我们思维技巧的规则进行的。这些规则形成一个能够被发现并加以确切陈述的封闭系统。我的证明论的基本思想就是要刻划我们的理智活动，制订出我们的思维过程所实际遵循的规则草案。”①“一致性证明确定我的证明论的有效范围,并且一般说来构成证明论的核心。”②他断言,要得到这一证明已经为时不远了。他说:“最终的结果将会表明：数学是一门没有任何预设的科学。为了奠定数学的基础，我们不需要克朗尼克的上帝，也不需要假定有彭加勒所说的与数学归纳法原理相适应的特殊的理智能力，或不需要布劳维尔的初始直觉；最

①F. G P. 475。
②同上，P。 479。

后，我们也不需要罗素和怀特海的无穷公理，可化归性公理，或完全性公理(这些公理实际上是不能用一致性证明来补偿的关于现实的内容上的假定)。”①

以上是我们从希尔伯特论数学基础的文献中，对有关证明论或元数学的论述按历史顺序所做的归纳和整理。

现在，我们可以把希尔伯特的元数学纲领总结如下：

希尔伯特提出，为了消除对数学基础可靠性的怀疑，避免出现悖论，就要设法绝对地证明数学的一致性，使数学奠定在严格的公理化的基础上。具体地说，将各门数学形式化，构成形式系统或形式理论，并证明各形式系统的一致性，从而导出全部数学的一致性。希尔伯特认为，有三种数学理论：1. 直观的非形式化的数学理论；2. 把第一种数学理论形式化，构成形式系统，形式系统包含逻辑演算，直观数学理论中的基本概念转换为形式系统中的初始符号，命题转换为符号公式，推演推则转换为符号公式之间的变形关系，证明转换为符号公式的有穷序列；3. 描述和研究第二种数学理论的数学,称为 元数学 ”或 证明论 ”。元数学主要研究形式系统的一致性证明，是一种非形式的直观的数学。在元数学中所用的方法只限于 有穷方法 ”。

二、希尔伯特纲领的历史意义和哲学意义

希尔伯特纲领提出以后，希尔伯特的学生阿克曼在1924年按照希尔伯特的证明论思想取得以下结果：如果对归纳规则加上一点限制，那么所得的初等数论是一致的。阿克曼的证明限于有穷方法。当时，哥德尔曾想按希尔伯特所指示的方向证明没有限制的初等数论的一致性，再证明分析的一致性。但是，哥德尔在1931年经过潜心研究，得到了以下两个不完全性定理(见下章）：

第一不完全性定理：在任何包含初等数论的一致的形式系统

---

①同上，p. 479。

中，存在着一个命题，该命题和它的否定都不是系统的定理；也就是说，如果形式数论系统是一致的，那么它就是不完全的。

第二不完全性定理：形式数论系统的一致性在系统内部是不可证明的。这一定理也可表述为：对强到足以使一切有穷推理都可以在其中形式化的形式系统而言，其有穷的一致性证明不可能在该系统内得到。

哥德尔不完全性定理给予希尔伯特纲领一个沉重打击，使得用有穷方法证明一致性的目标落空了。希尔伯特在得知哥德尔不完全性定理以后，在感情上几乎无法接受，感到生气和灰心。但是，希尔伯特毕竟是一位伟大的人物，不久他便开始尝试用新的方法修改他的证明论计划。这种新方法就是‘ 超穷归纳法 ”。希尔伯特在1931年发表了两篇论超穷归纳法的文章，这时他已退休。

希尔伯特的伟大科学精神深深地鼓舞了他的学生和他的学派的成员。1936年，甘岑用超穷归纳法证明了算术的一致性。1940年，阿克曼也用超穷归纳法给出算术一致性的另一个证明。此外，在40年代和50年代还有一些数理逻辑学家对算术的一致性作出了证明。在这些证明中，有些使用了超穷归纳法，有些使用了别的方法。这些证明的共同点是：在某些方面使用了在形式算术中不能形式化的论证，也就是说，使用了比有穷方法较强的方法。阿克曼在1924年证明受限制的初等数论（ 算术）一致性时，所用的方法是有穷的、可在形式系统中形式化的方法，因而根据哥德尔定理，用这种方法不能作出整个算术系统的一致性证明。

证明论的下一步目标是要证明实数论的一致性，现已有一些中间结果，即对实数论作某些限制后证明其一致性。

由以上所说的证明论的发展过程可以看出，那种认为哥德尔定理推翻了希尔伯特纲领的说法是完全错误的，恰恰相反，希尔伯特纲领在哥德尔定理之后经过修改和发展，终于由假说变为科学，在数理逻辑中开辟了证明论的研究方向，希尔伯特是当之无愧的证明论之父。具体说来，我们有以下几点结论：

1. 希尔伯特的元数学纲领起初是一个假说。它的基本点是，把直观数学理论形式化，构成形式系统，这是对象理论；建立以形式系统为研究对象的元数学或证明论，这是元理论。．至于元理论中必须用有穷方法，这并不构成希尔伯特纲领的本质部分。

构成形式系统的方法现在已经越出数学的范围，它不但在现代数学和逻辑中应用很广，而且还渗透到其他自然科学甚至某些社会科学部门，为研究这些学科提供了强有力的工具。因此，形式公理方法具有极其重要的科学方法论意义。著名学者塔尔斯基称它为‘ 演绎科学方法论 ”。

这种纯形式的研究是十分必要的，是完全合理的。恩格斯在谈到数学研究空间形式和数量关系时说：“ 为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；这样，我们就得到没有长宽高的点、没有厚度和宽度的线、a和b与x和 y ，即常数和变数；只是在最后才得到悟性的自由创造物和想象物，即虚数。①进行‘ 纯粹状态 ’的‘ 脱离内容 ’的纯形式研究决不是脱离实际。形式系统由于其高度的抽象性，以毫无意义的一堆符号出现，因而表面上掩盖了它们来源于客观世界的事实。但是，一个形式系统暂时撇开意义，并不等于它永无意义。一个形式系统可以有许多模型，一个科学的形式系统的构成，实际上就是这许多模型的共同本质的抽象概括。各种模型都是有意义的，是客观世界的反映。暂时无意义的形式系统就是以各种模型为中介反映客观世界的。一个形式系统的现实原型就是它的各种模型所反映的客观实在。正因为如此，它才能得到应用。例如，逻辑代数的形式系统是类代数、命题代数、开关代数等模型的科学概括。它最初是由英国逻辑学家布尔用代数方法研究传统逻辑而产生的，他当时知道他的代数有类、命题、概率论三个模型，并不知道有开关电路的模型，但由于开关电路同

①《 马克思恩格斯选集》，第三卷，人民出版社1972年版，第77页。

类代数和命题代数有共同的本质，因而在100年以后人们终于发现逻辑代数可以用于开关电路。对一个科学的形式系统，我们不但要把它用于预定的模型，更重要的是要发现当时未知的新模型。

2. 哥德尔第二不完全性定理并未推翻希尔伯特纲领。首先，在希尔伯特纲领提出以后，阿克曼等人证明了加了限制的自然数算术是无矛盾的，这表明希尔伯特纲领在一定范围内是可行的。其次，哥德尔定理正是哥德尔创造性地运用希尔伯特的对象理论和元理论思想所得到的伟大成果。它否定的不是希尔伯特纲领的基本点，而是用有穷方法证明算术系统一致性的要求。哥德尔在1931年的论文《论〈数学原理〉及其相关系统的形式不可判定命题》中说，他的第二不完全性定理"同希尔伯特的形式体系化的观点是不矛盾的。因为这一观点仅预设有一个只用有穷的证明方法的一致性证明，但可设想：存在着不能在P.（按：形式算术系统）的形式体系中表达的有穷证明。"①哥德尔的结果实际上推广了希尔伯特的设想，使希尔伯特纲领中的非本质部分（元理论必须用有穷方法的限制）得到修正。哥德尔定理对希尔伯特纲领是一种辩证的否定，或者说"扬弃"，使它得到像恩格斯所说的"纯化"和"修正"，使它从假说发展为科学。

3. 希尔伯特纲领的一个重要思想，就是把所研究的理论本身作为对象理论，把研究对象理论所使用的另一种理论叫做元理论。这种区分具有普遍的方法论意义，应当加以推广。对象理论与元理论是对立统一的关系，它们既对立，又统一，由此构成了科学中不同层次之间的对立统一。各门科学是从不同的角度以客观世界为研究对象的，这是一个层次。如果以一门科学本身为研究对象，那么这门科学本身就是对象理论，研究对象理论的理论就是元理论。对象理论和元理论的区分，使科学之间的层次一目了然，开拓

---

①F. G p. 615。

了各种元科学理论的领域，扩大了人们对客观世界的认识。

4. 在数学和数理逻辑中，实无穷论和潜无穷论之争由来已久。如何评价这两种学说呢？让我们首先引用恩格斯的一段话：“数学的无限是从现实中借来的，尽管是不自觉地借来的，所以它不能从它自身、从数学的抽象来说明，而只能从现实来说明。如我们已经看到的，如果我们从这方面来研究现实，那我们就可以看到数学的无限关系所从之而来的现实关系，甚至可以看到使这种关系起作用的数学方法在自然界中的类似物。”①这段精辟的论述为我们科学地评价实无穷论和潜无穷论提供了准则。笔者认为，实无穷和潜无穷是客观世界的无限关系的两种不同的数学抽象，在现实中有从之而来的原型。例如，作为极限概念的无穷大和无穷小是一种潜无穷，对于它们在现实中的原型，恩格斯作了说明：“对地球上的力学说来，地球质量已经被看作无限大；在天文学中，地球上的物体及与之相当的陨石就被看作无限小；同样，对于天文学来说，只要它超出最邻近的恒星的范围来研究我们这一恒星系的构造,太阳系诸行星的距离和质量就会趋近于零。”②再如,实数集合是一种实无穷，被当成现实的、完成的实数总体，它的原型就是给定的一条线段上的所有点。在数学中，不同的数学理论需要采用不同的无穷论。实际上，实无穷论和潜无穷论在不同的数学理论中具有公设的性质。它们从不同侧面反映了无限的物质世界。但是，这两种理论都有其局限性。实无穷论者强调无穷的现实总体性，忽略其发展变化性；潜无穷论者则与之相反。希尔伯特在《论无穷》的著名讲演中，看出了这个问题，为了补充以潜无穷论为基础的有穷方法，提出把实无穷作为理想元素的方法。这种做法是可取的。现实世界中的无穷具有辩证性，数学中的实无穷和潜无穷的矛盾反映了客观的无限性中的矛盾，即现实的、完成的总体和潜在的、发展变化的、被产生的东西之间的矛盾，它们是对立统一

①②《马克思恩格斯选集》，第三卷，第569页。

的，互补的。我们不能简单肯定一个而否定另一个。

5从希尔伯特纲领和元数学的研究发展起来的希尔伯特学派常被称为形式主义学派。我们应当正确地理解这一名称。形式主义学派是数学基础与数理逻辑中的一个学派，他们的基本论点是关于数学基础与数理逻辑的具体问题的；这一学派不是哲学中那种脱离内容、夸大形式的唯心主义的形式主义流派。在希尔伯特学派中，有些学者确实有一些唯心主义的形式主义观点，但这并不是希尔伯特学派的主流。实际上，希尔伯特学派应当被称为形式化学派,元数学(证明论)学派,或者如克林所称呼的公理学派,这就不致于产生误解了。

另一方面，希尔伯特本人并没有自命为形式主义者。他的哲学观点基本上是素朴的唯物论，与其学派中持唯心主义的形式主义观点的一些学者并不相同。例如，他在1900年的巴黎演说中说：“ 在坚持把证明的严格性作为完善地解决问题的一种要求的同时，我要反对这样一种意见，即认为只有分析的概念，甚至只有算术的概念才能严格地加以处理。这种意见，有时为一些颇有名望的人所提倡，我认为是完全错误的。对于严格性要求的这种片面理解，会立即导致对一切从几何、力学和物理中提出的概念的排斥，从而堵塞来自外部世界的新的材料源泉，最终实际上必然会拒绝接受连续统和无理数的思想。这样一来，由于排斥几何学和数学物理，一条多么重要的、关系到数学生命的神经被切断了！”①这表明，希尔伯特十分重视外部世界的材料源泉，把它看成是‘ 数学生命的神经”。他说，公式是‘ 发展至今的构成通常数学的思想上复写”。②他主张‘ 观察资料和现象的总体应该成为严肃彻底的研究对象”,他大声疾呼 科学的任务之一是把人们从盲目武断、感情用事和陈规旧俗的束缚下解放出来，同时使我们摆脱主观主义”。③

---

① 瑞德著《 希尔伯特》,上海科技出版社1982年版,第98页。

② F. G P·465。

③ 同上,p·475。

希尔伯特纲领的提出和修改，从假说变为科学的过程，充分体现了希尔伯特的素朴唯物主义的精神。毋庸讳言，希尔伯特原先不承认实无穷的客观性，把实无穷说成超乎一切经验之外的理性概念，在这里希尔伯特流露出唯心主义的经验论观点。然而，希尔伯特是一位伟大的科学家，在哥德尔定理确立之后，他立即修改他的证明论方案，提出在元数学中用超穷归纳法作为证明工具，这在实际上承认了实无穷的客观性。这充分体现了希尔伯特的实事求是的科学精神。最后，我们以希尔伯特的两句名言结束本章：

我们必须知道，

我们必将知道。

第四编　数理逻辑发展初期

第十四章　哥德尔的伟大贡献

1928年，在意大利波伦那举行的国际数学家大会上，希尔伯特总结了当时数理逻辑的状况，提出了四个急待解决的中心问题：

1. 用有穷论方法证明分析的一致性；
2. 把一致性证明推广，特别是证明选择公理的一致性；
3. 数论和分析的形式系统的完全性；
4. 一阶逻辑的完全性。

在《理论逻辑基础》(1928）中，希尔伯特和阿克曼也提出了一阶逻辑的完全性是一个还未解决的问题。

在希尔伯特提出这四个问题以后的短时期内，哥德尔一个人解决了全部问题，这在科学史上是罕见的。1929年，哥德尔证明了一阶逻辑的完全性，解决了希尔伯特提出的第四个问题。1930年，哥德尔开始研究分析的一致性的证明，结果得到不完全性定理，对希尔伯特的第三个问题作出了否定的解决；由不完全性定理导出的系定理即第二不完全性定理表明：一个包含数论的形式系统，如果是一致的，那么它的一致性不能在系统中证明，这就否定地解决了希尔伯特提出的第一个和第二个问题。1938年，哥德尔证明了广义连续统假设和选择公理对于集合论其他公理的一致性，对希尔伯特提出的第二个问题作了另外一种相对的解决。

哥德尔是当代最伟大的数理逻辑学家。他于1906年出生在现今捷克斯洛伐克的布尔诺。1924年中学毕业后，他进入维也纳大学，先是攻读物理，后于1926年转攻数学。1928年，希尔伯特提出未解决的一阶逻辑完全性问题之后，哥德尔向这个问题发起进攻。他在1929年完成了大学课程，并在1929年秋天完成了博士论文《逻辑的函项演算公理的完全性》，进行了答辩。1930年2

月得到批准获得博士学位，博士论文在1930年公开发表。1930年夏天，哥德尔开始研究分析的一致性问题，结果得到不完全性定理。1930年9月，哥德尔参加了哥尼斯堡科学会议，在一次关于数学基础的讨论的会议期间，宣布了他的第一不完全性定理（在包含算术的一致的形式系统中，存在不可判定的命题）。1931年，关于不完全性定理的论文《论〈数学原理〉及有关系统中的形式不可判定命题》在《数学和物理学月刊》公开发表。1933—1938年，哥德尔任维也纳大学讲师。在1934年，他访问了普林斯顿高等研究院，在那里讲授了不完全性定理，这篇讲演后来以《论形式数学系统的不可判定命题》发表，这篇讲演给出了一般递归函数的定义，推动了递归论的研究。1935年10月，哥德尔第二次访问普林斯顿高等研究院，曾对冯·诺意曼（von Neumann）讲述关于选择公理相对一致性的证明。1938年秋，哥德尔第三次访问美国，在普林斯顿高等研究院和圣母大学讲授了选择公理和广义连续统假设的一致性，其论文《选择公理和广义连续统假设的一致性》在1938年底的美国《国家科学院院刊》发表。从1940年起，哥德尔定居美国，在普林斯顿高等研究院工作，1953年任教授，1978年1月逝世。

第一节　哥德尔完全性定理

定理是说：狭义函项演算的每一有效公式是可证的。哥德尔证明了与此相等价的一个定理：

狭义函项演算的每一公式，或是可否证的，或是可满足的。

这等于说：

狭谓词演算（一阶谓词演算）的任一公式A，或者A是可证的，或者¬A是可满足的（或A不是普遍有效的）。

在证明过程中，要使用挪威数学家斯科伦（T. Skolem）在1920年的论文《对数学命题的可满足性或可证性的逻辑组合的研

究：累文汉定理的简化证明及推广》中的一个结果：一阶谓词演算中的每一合式公式都有一个斯科伦前束范式（即全称量词都在存在量词前的范式），它们可以互推。由此可得，一个公式是普遍有效的，当且仅当它的斯科伦范式是普遍有效的。因此，我们只限于证明，所有具有斯科伦范式的普遍有效公式是可证的。①

设任一普遍有效公式 A 的斯科伦范式 A_0 为：

$(\exists x_1)\cdots(\exists x_k)(\forall y_1)\cdots(\forall y_l)B(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l)$。

我们先构造一些公式。由个体变元的无穷序列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 所组成的 k 元组 $(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})$ 是可数的，我们可按照熟知的方式来数，即先依照足标的和 $(i_1+i_2+\cdots+i_k)$ 的大小而排列，其次，如果足标的和相等，则按辞典次序排列，因此可排成下面的一列：$(x_0,x_0,\cdots,x_0);(x_0,x_0,\cdots,x_1);(x_0,x_0,\cdots,x_1,x_0);\cdots$。我们把第 n 个 k 元组记为 $(x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k})$ 此外再以 B_n 表示以下公式：

$$B(x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k};x_{(n-1)l+1},x_{(n-1)l+2},\cdots,x_{nl})。$$

在这个公式中，分号以后的个体变元与分号以前的个体变元是绝不相同的，同时与在以前的公式 $B_m(m<n)$ 中所曾出现过的一切变元不相同。另一方面，当 $n>1$ 时，变元 $x_{n_1},\cdots,x_{n_k}$ 却已经在 $B_m(m<n)$ 中出现过了。

令 C_n 为 $B_1\vee B_2\vee\cdots\vee B_n$。

我们可以看出 C_n 中无量词，C_n 可看成是一个命题公式，方法是把不同的谓词变元看成是不同的命题变元，把带有不同变目的相同谓词变元也看成是不同的命题变元。因此我们可以考虑，C_n 是不是重言式的问题。

C_n 的全称闭包记为 D_n。

例如，给定了一个斯科伦范式：

$$(\exists x_1)(\forall y_1)(F(x_1)\to F(y_1)),$$

① 见 F. G pp. 583-591。希尔伯特和阿克曼在 1938 年作了改进，将斯科伦范式改为全称量词均在存在最词后。

B_1 为 $F(x_0) \to F(x_1)$，

B_2 为 $F(x_1) \to F(x_2)$，

C_2 为 $(F(x_0) \to F(x_1)) \vee (F(x_1) \to F(x_2))$，

D_2 为 $(\forall x_0)(\forall x_1)(\forall x_2)[(F(x_0) \to F(x_1)) \vee (F(x_1) \to F(x_2))]$。

C_n 有两种情况：

1. 有一 n 使 C_n 是重言式。从而 C_n 可证，据后件概括规则，D_n 也可证。用数学归纳法可以证明：$D_n \to A_0$，这样斯科伦范式就是可证的。

2. 没有一个 n 使 C_n 是重言式。这样，斯科伦范式 A_0 不是普遍有效的，我们可以给出一些以自然数为个体域的数论谓词，把它们代入 A_0 的谓词变元中之后，得到一个假命题。简要证明如下。由于对每一 n，C_n 都不是重言式，因而我们给 C_n 中的命题变元赋值时，使 C_n 为假。每一 C_n 有一使之为假的满足系。对任一给定的 n，这种假的满足系只能是有穷的，但整个说来必有无穷多个，因为由 C_1，C_2，C_3，…组成的序列是无穷的。我们可以假定所有出现在 C_1，C_2，C_3 等等任何一个公式中的命题变元可以照它们第一次出现的顺序加以列举，对它们作出以下的主要满足系。如果第一个命题变元在上述无穷多的假满足系中有值"真"，那么它得到值"真"否则便得到值"假"。以后，我们只考虑那些满足系，其中第一个命题变元代入了它所对应的值。这时如果第二个命题变元出现无穷多次的"真"值，那么它取为"真"，否则为"假"。同样，当确定后一个命题变元的值时，我们只考虑那些满足系，其中前一个命题变元取得了它所对应的值。显然，这个主要满足系同时使所有公式 C_1，C_2，C_3 等等变假。哥德尔在证明主要满足系存在时说，要"用熟悉的论证"，这实际上是指葛尼希(König)无穷引理，这是关于无穷集合的一条定理。

其次，我们定义一些数论谓词，用以代入斯科伦范式 A_0 中的谓词变元。我们规定在填有个体变元的谓词表达式中，个体变元

z_0, z_1, z_2 等等代之以自己的数标，结果可得到 $F(0), G(1,2), H(1,2,3)$ 等等一类表达式。这些数论谓词的真值与在主要满足系中原来的谓词表达式（实际上已作命题变元看待）的真值相同。因此，这些数论谓词就是对 A_0 中的谓词变元的解释。现在，我们在 A_0 中，把自然数作为个体域，把其中的谓词变元代人上述定义的数论谓词，这就使 A_0 变为一个假命题，也就是使下式 即 $\neg A_0$）

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_k)(\exists y_1)\cdots(\exists y_l)\neg B(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l)$$

变成一个真命题。这可简要论证如下：取第。个 k 元组相应的自然数组 $(n_1,\cdots,n_k)$，经过代人后，

$$\neg B(n_1,\cdots,n_k;(n-1)l+1,\cdots,nl)$$

的真假值同对 c_n 的最后一个析取项 B_n（该项为假）：

$$B(x_{n_1},\cdots,x_{n_k};x_{(n-1)l+1},\cdots,x_{nl})$$

中的命题变元作相应真假值代入后的值相反，也就是说，$\neg B(n_1,\cdots,n_k;(n-1)l+1,\cdots,nl)$ 是一个真命题。因为这对每个 k 元组自然数都真，所以，

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_k)(\exists y_1)\cdots(\exists y_l)\neg B(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_l)$$

对于所给的自然数域是真的。由此证明了 $\neg A_0$ 在自然数域是可满足的，当然是可满足的。

由以上的 1 和 2，我们证明了：A 的斯科伦范式 A_0 是可证的，或者 $\neg A_0$ 是可满足的（而且是在自然数域可满足的）。由于 A 与 A_0 可以互推，我们得到：对任一谓词演算公式 A，或者 A 是可证的，或者 $\neg A$ 是可满足的（而且是在自然数域可满足的）。这就得出完全性定理：如果 $\neg A$ 不可满足则 A 可证，即如果 A 是普遍有效的，那么 A 是可证的。

哥德尔完全性定理的建立标志着从弗雷格以来所创建的一阶谓词演算达到了完善的地步。这个定理圆满地解决了希尔伯特在1928年所提出的未解决的一阶逻辑完全性问题。它具有以下形式（$\Longrightarrow$ 表示 推出”）：

普遍有效 $\Longrightarrow$ 在自然数域 可数无穷域)有效 $\Longrightarrow$ 可证。

哥德尔说："现在所证的等价式：'有效的＝可证的'，对判定问题来说，包含着把不可数的东西化归为可数的东西，因为'有效的'指的是函项的不可数总体,而'可证的'预设的只是形式证明的可数总体。"①

因此，我们可以说，哥德尔完全性定理在不可数的东西与可数的东西之间架起了一道联系的桥梁。

在哥德尔完全性定理的证明过程中，使用了排中律，这在假定有一个数n或没有一个数n使C。为重言式时必须使用的，此外，还要用葛尼希无穷引理。在这里必须要有超穷思维。哥德尔正是对"超穷思维"具有"客观主义"的态度,才作出了完全性定理的证明,建立了"不可数"与"可数"之间的联系。哥德尔在给王浩教授的信中指出："在数学上，完全性定理确实是斯科伦1922年文章的一个几乎不值一提的推论。然而事实是，在那个时候，没有人（包括斯科伦本人）得出这个结论（既没有从斯科伦的1922年文章得出,也没有象我所做的那样从自己的类似的考虑中得出)。"②斯科伦1922年的文章是《对公理集合论的一些说明》，其中有一部分给出累文汉定理（亦称累文汉—斯科伦定理）的一个新证明。德国逻辑学家累文汉(L. Lowenheim)在1915年证明了一条定理：如果一阶谓词演算的一个公式是可满足的，那么在自然数域（或可数无穷个体域）内它也可满足。斯科伦在1920年使用存在量词全部在全称量词前的前束范式，对累文汉定理作了新的证明，在证明过程中还使用了选择公理和戴德金的"链"的一些结果。斯科伦还把累文汉定理推广到一阶谓词演算的可数无穷公式集。斯科伦在1922年对累文汉定理作出了新的证明，没有使用选择公理和戴德金的结果。在这个新的证明中，实际上包含着得出完全性定理所需要的引理，他已经隐含地证明了"或者A是可证的，或者¬A是

①F. G. p. 589。

③Wang Hao, From Mothematics to Philosophy, London &New York, 1974, p. 8.

可满足的"可证的"是在非形式的意义上)。然而,斯科伦没有能表述这个结果，显然他自己也不清楚，看来他并不知道这个结果。所以，希尔伯特和阿克曼在1928年《理论逻辑基础》中陈述未解决的完全性问题时，根本没有提斯科伦1922年的文章。哥德尔总结斯科伦的失误时指出："逻辑学家的这种盲目性(或偏见，或不管你叫它什么）实在令人吃惊。但我认为不难找到解释。其原因就是由于当时所普遍缺少的、对元数学和非有穷思维所需要的认识论态度。""数学中的非有穷思维被广泛地认为只是在它能用有穷的元数学'解释,或'证明为正当'的范围内才有意义。……这个观点几乎不可避免地导致在元数学中拒绝非有穷的思维。……但是前面提到的从斯科伦1922年得出的显而易见的推论确实是非有穷的，并且对于谓词演算的任何其他的完全性证明都是非有穷的。因此这些东西没有为人们注意或者被忽略了。"①反对在元数学中使用非有穷思维及其论证，这是在哥德尔之前斯科伦及其他人没有能作出完全性定理证明的基本原因。哥德尔得到了这个结论之后还说："我的客观主义的数学和元数学一般概念，特别是关于超穷思维的客观主义的观念，对于我的其他逻辑工作也是根本的。"②哥德尔在这里表达了他的素朴唯物论和辩证法的思想。辩证唯物主义认为，世界是无限的，无限是由有限组成的。为了认识世界和改造世界，我们的思维必须把握无限，根本的手段就是要通过科学抽象。哥德尔所说的"超穷思维"就是对无限进行科学抽象的思维，这是科学研究取得成功的一个重要条件。哥德尔完全性定理的建立生动地说明了这一点。斯科伦的失误在于把无限与有限加以割裂，固守有穷思维，从而不能把握无穷，当完全性定理已碰到自己的鼻尖时仍然不能认识它。这对科学家来说，实为憾事，我们应当引以为戒。

---

①同上，pp. 8—9。
②同上，P. 9。

第二节 模型论的两条基本定理——累文汉定理和紧致性定理

我们在上文说过，累文汉定理是说：如果一阶谓词演算的一个公式是可满足的，那么在自然数域（或可数无穷个体域）内它也可满足。这等于说，如果一阶谓词演算的一个公式在可数个体域有效，那么它是普遍有效的。

斯科伦把此定理推广到一阶谓词演算的可数公式集：如果一阶谓词演算的可数公式集是可满足的（即有一模型），那么它在可数个体域内也可满足（即在可数个体域上有模型）。

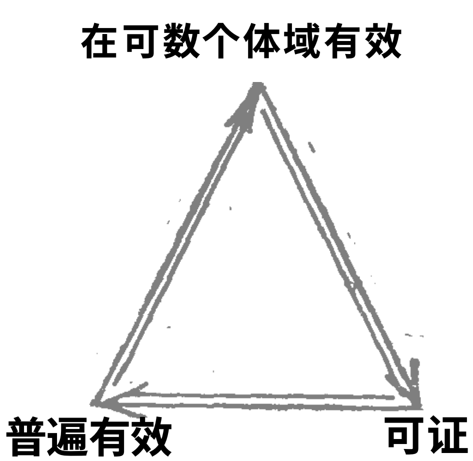
由哥德尔完全性定理立即可以得出累文汉定理作为系定理。

哥德尔证明了一个较强的结论：一阶谓词演算的任一公式A，或者A是可证的，或者¬A是在可数个体域中可满足的。这等于说,如果¬A在可数个体域不可满足，那么A是可证的；也等于说，如果A在可数个体域有效，那么A是可证的（从而，A是普遍有效的）。

累文汉定理具有以下形式：

在可数个体域有效 ⟹ 可证 ⟹ 普遍有效。

与哥德尔完全性定理结合起来，在上述三个概念之间有以下的三角形关系：



第三种关系即可证 $\Longrightarrow$ 普遍有效，$\Rightarrow$ 在可数个体域有效，这是显然的，因为谓词演算有一条可靠性（语义一致性）定理：如果一个公式是可证的，那么它就是普遍有效的。

斯科伦1922年对累文汉定理的证明为哥德尔完全性定理准备了条件。下面我们简要陈述这个结果。①斯科伦证明的是：如果一个一阶命题是可满足的，那么它在可数无穷域内也是可满足的。

首先，把某个一阶命题变为有以下结构的范式：

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_m)(\exists y_1)\cdots(\exists y_n)U(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)。$$

证明过程是由无穷多步构成的序列。第一步，我们选 $x_1=x_2=\cdots=x_m=1$。然后在数1, 2,⋯ ,n+1 中可选 $y_1,\cdots,y_n$ 使得

$$U(1,1,\cdots,1,y_1,\cdots,y_n)$$

是可满足的。第二步，对 $x_1,\cdots,x_m$，选择每一种排列，该排列每在n＋1个数 $1,2,\cdots,n+1$ 中取m个加以重复，但要除去第一步的排列1，1，⋯，1。对于第一步所得到的至少一个解来说，对 $(n+1)^m-1$ 个排列的每一个，可在数 $1,2,\cdots,n+1+n((n+1)^m-1)$ 中选择 $y_1,\cdots,y_n$，使得对于在数列的一节 $1,2,\cdots,$ n＋1中所取的每一排列 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 来说,命题 $U(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)$ 对于在节 $1,2,\cdots,n+1+n((n+1)^m-1)$ 中所取的相应选择来说是成立的。因此，从第一步的某些解，我们得到一些延续的结果，这些构成第二步的解。如果给定的一阶命题是一致的，那么我们就能这样继续上述过程。

为了对整个自然数序列得到唯一确定的解，我们必须在一个给定了的步骤所得到的全部解中能选择一个单个的解。为达到这一点，我们可在一个任意的步骤中所得的全部解中取第一个，只要它们按下列方式在一个序列中排成次序：

在给定的一阶命题中出现的谓词符号可以排成次序，使得在

① 见 F. C, pp. 293-294。

数列的一节1, 2,⋯ ,n中形成的谓词符号位于在节1, 2,⋯ ,n＋1中所形成的所有新谓词符号之前。对任一步的任何两个不同的解L和L′来说，写L<L′当且仅当R_{ij}⋯在L中等于0而在L′中等于1，这里R_{ij}⋯是在L和L′中有不同值的第一个谓词符号（0意为“假”，1意为“真”）。从L＜L′和L′＜L″可得L<L″。我们立即可见，对第n步的两个解L_n和L_n'来说（它们分别是第v步的解L_v和L_v'的延续），$L_n<L_n'$蕴涵$L_v\leqslant L_v'$。

令$L_{1,n}$，$L_{2,n}$，⋯，$L_{e_n,n}$是第n步的解。如果我们现在构成第一个解的序列$L_{1,1}$，$L_{1,2}$⋯，那么我们就可证明它们在逻辑的意义上是“收敛”的。因为令$L_{1,n}$是$L_{a_v^n,v}$（n＞v）的延续，这时如果n′>n，则$a_v^n\leqslant a_v^{n'}$。但由于数a_v^n对e_v只能有值1，因而对一切充分大的n，它仍是不变的。因此我们有以下事实作为“极限”：一阶命题在整个数列构成的域中是可满足的。

我们从以上的证明过程可以看出，斯科伦在证累文汉定理时所用的方法非常接近哥德尔证完全性定理的方法：使用了斯科伦本人所构造的范式，斯科伦的“解”实际上就是哥德尔的“满足系”，需要从存在着“解”的无穷序列推出存在着在自然数域的“解”（即“主要满足系”）。但是，斯科伦毕竟没有能从这个证明向前跨出一步，没有能夺取完全性定理的桂冠。

累文汉定理建立了可数无穷域和不可数无穷域之间的联系，说明可数无穷域是逻辑中要考察的最大的域。斯科伦在1922年的文章中指出，任何一形式化集合论据累文汉定理有一可数模型。由于自然数可用集合来定义，例如用戴德金的“链”，策梅罗的方法等，因而斯科伦看到有可能存在集合论的两个不同的模型。后来，斯科伦在1934年构造了算术的非标准模型。

斯科伦根据累文汉定理，在1922年提出了“集合论观念的相对性”的“怪论”，史称“斯科伦怪论”。从直观上说，如果存在从第一个集合到第二个集合的一一映射，那么两个集合是等价的；但是这

种映射本身也是有序对元素的汇合。如果在一个形式化的集合论中，这种汇合作为一个集合存在，那么给定的两个集合在理论中等价；如果这种汇合不是作为一个集合存在，那么两集合在理论中不等价，并且当一个集合是在理论中所定义的自然数集时，另一个集合却是'不可数的。"这就说明，不可数的东西并不是绝对的，我们可以把不可数的东西化归为可数的东西，可数与不可数之间的区别同形式系统有关。斯科伦怪论很好地揭示了集合论的辩证性质。

与完全性定理有密切联系的紧致性定理是哥德尔在1930年文章中为了推广完全性定理时提出来的。他提出了完全性定理的一个推广定理(定理IX)；

狭谓词演算的每一可数无穷公式集或者是可满足的(即系统的所有公式是同时可满足的)，或者有一有穷子系统，其逻辑积是可否证的。

此定理可从以下紧致性定理(定理X)立即推导出来：

一个可数无穷的公式系统是可满足的当且仅当每一有穷子系统是可满足的。

这个定理也可陈述为：一个命题集有模型当且仅且每个有穷子集有模型。

哥德尔对这个定理给出了语义证明。首先把一个公式集Σ变为一度的范式集Σ′("度"就是在前束词中全称量词被存在量词彼此分开的块数)，使Σ的任一子集的可满足性等价于Σ′的相应子集的可满足性。令

$$(\forall\alpha_1)(\exists\beta_1)A_1(\alpha_1;\beta_1),(\forall\alpha_2)(\exists\beta_2)A_2(\alpha_2;\beta_2),$$
$$\cdots,(\forall\alpha_n)(\exists\beta_n)A_n(\alpha_n;\beta_n),\cdots$$

是一度的可数范式集Σ，令α_i是一个r_i元组，β_i是s_i元组。令$\alpha_1^i,\alpha_2^i,\cdots,\alpha_n^i,\cdots$是取自序列$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$的所有$r_i$元组的序列，并按照下标的增加的数加以排列。此外，令β_k^i是以上序列的变元的s_i元组，使得以下的变元序列

$$\beta_1^1, \beta_2^1, \beta_1^2, \beta_3^1, \beta_2^2, \beta_1^3, \beta_4^1, \cdots$$

等同于序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，…如果每一 β_k^i 被 x 的相应的 s_i 元组替换。现规定 $B_1 = A_1(\alpha_1^1; \beta_1^1)$，我们定义公式序列 $\{B_n\}$：

$$B_n = B_{n-1} \wedge A_1(\alpha_n^1; \beta_n^1) \wedge A_2(\alpha_{n-1}^2; \beta_{n-1}^2) \wedge \cdots \wedge$$
$$A_{n-1}(\alpha_2^{n-1}; \beta_2^{n-1}) \wedge A_n(\alpha_1^n; \beta_1^n).$$

把 B_n 中的个体变元全部用存在量词约束起来，得到的公式记为（P_n）B_n，此公式是上述可数范式集 Σ 前 n 个公式的推论。因此，如果 Σ 的每一有穷子集是可满足的（即有模型），那么每一 B 也是可满足的（即有模型）。但是如果每一 B_n 有模型，那么整个公式集 Σ 也有模型，这里的证明方法与哥德尔完全性定理中利用“满足系”和数论谓词证明 $\neg A_0$ 可满足的方法是类似的。

根据紧致性定理，只要证明了一个命题集的每一有穷子集有模型，那就证明了该命题集有模型，而证明有穷子集有模型比较容易，这就使紧致性定理在模型论中得到广泛应用。例如，美国数学家罗宾逊（A. Robinson）在 1960 年创立了数学分析中的一个分支学科——非标准分析，它是建立在与实数域 R 类似的有序域 R^* 之上的，但 R^* 中有很多互不相等的无穷大元和无穷小元，这种 R^* 用普通数学方法是很难构造的，但罗宾逊用紧致性定理证明了 R^* 的存在性，论证了无穷小数的存在性。利用无穷小数的客观存在性，可以自然而又严格地定义 R 中的极限概念和函数的连续性概念等，克服了“$\varepsilon-\delta$”方法的缺陷。

综上所说，哥德尔建立的完全性定理不但标志着古典逻辑演算的完善，而且开辟了模型论研究的方向。

第三节　哥德尔不完全性定理

哥德尔在 1931 年发表《论数学原理＞及其相关系统的形式不可判定命题》，建立了永垂青史的不完全性定理。1934 年春，哥德尔在普林斯顿高等研究院发表了题为《论形式数学系统的不可判

定命题》的著名讲演，对1931年的论文作了改进、补充和发展。哥德尔不完全性定理的建立开辟了数理逻辑的新纪元，20世纪30年代数理逻辑主要成果都与它有关。因此我们在本节对这一定理作一个较详细的评述。①

一、自然数算术的形式系统

首先，哥德尔对一般的形式数学系统作了定义，引进了一系列概念。

一个形式数学系统是由符号以及应用符号的机械规则所组成的系统。单个的符号称为未定义项。公式是未定义项的有穷序列。在公式中有两类有意义的公式，一类表示数，一类表示命题。公理是从有意义的公式中选取的，其数目可以是有穷的，也可以是无穷的。一个推理规则定义了根据这一规则的直接后承关系，这种关系是在一组称为前提的有意义公式M_1，…，M_k和一个称为结论的有意义公式N之间的关系（通常k=1或2）。

哥德尔指明，推理规则及有意义的公式和公理的定义是构造性的；这就是说，对每一个推理规则来说，将存在一个有穷的程序来决定一个给定的公式B是否是给定的公式A_1，…，A_k根据这一规则的直接后承，将存在一个有穷的程序来决定给定的公式A是否是一个有意义的公式或者公理。

一个公式N被称为M_1，…，M_k的直接后承，如果N是M_1，…，M_k根据任一推理规则的直接后承。一个公式的有穷序列是一证明（特殊地说是序列的结尾公式的证明），如果序列中的每一公式或者是一个公理，或者是一个或多个前行公式的直接后承。一个公式是可证的，如果存在一个关于此公式的证明。形式系统是完全的，如果对每一有意义的公式A而言，或者A或者¬A是可证的。

①参看哥德尔的两篇论文，载The Undecidable pp. 4—74。

哥德尔所要证明的就是，所有算术命题能够表达在其中作为有意义公式的形式系统不是完全的。为此，哥德尔具体构造了自然数算术的形式系统。以下陈述的系统与哥德尔原来陈述的系统是一样的，只不过更严格了。

1.初始符号

(1)逻辑常项：¬（并非），∨（或者），(∀…)[对所有…而言]，(∃…)[存在一个…]，=（等于）。

(2)非逻辑常项

ⓘ函数符号：+（加），·（乘），′（后继）。

ⓘⓘ个体常项符号（零元函数符号）：0（零）。

ⓘⓘⓘ个体变元：x, y, z, …（自然数）。

ⓘⓥ括号：(,)。

2.项

(1) 0是一个项；

(2)每一变元是一个项；

(3)如果s是项，则(s)′是项；

(4)如果s和t是项，则(s)+(t)是项；

(5)如果s和t是项，则(s)·(t)是项；

(6)只有以上所给的才是项。

3.公式

(1)如果s和t是项，则(s)=(t)是一个公式；

(2)如果X是一个公式，则¬(X)是一个公式；

(3)如果X和Y是公式，则(X)∨(Y)是一个公式；

(4)如果X是一个公式，并且△在其中是自由的，则(∀△)(X)和(∃△)(X)是公式；

(5)只有以上所给的才是公式。

4.定义

(1)(A→B)定义为(¬A∨B)。

(2)(A∧B)定义为¬(¬A∨¬B)。

(3) $(A \leftrightarrow B)$ 定义为 $((A \to B) \wedge (B \to A))$。

5. 公理和推理规则

(1) 带等词的一阶谓词演算的公理和规则由希尔伯特的一阶谓词演算的公理和规则增加以下两条关于等词的公理：

ⓘ $x=x$，

ⓘⓘ $(x=y) \to (A(x) \to A(y))$。

①是等词自返律，ⓘⓘ是同一东西的不可分辨性原理。

(2) 自然数算术的公理

ⓘ $0 \neq x'$。

ⓘⓘ $(x'=y') \to (x=y)$。

ⓘⓘⓘ $x+0=x$。

ⓘⓥ $(x+y')=(x+y)'$。

ⓥ $x \cdot 0=0$。

ⓥⓘ $x \cdot y'=(x \cdot y)+x$

ⓥⓘⓘ $A(0) \wedge (\forall x)(A(x) \to A(x')) \to A(x)$。

①、ⓘⓘ是皮亚诺原来的公理，ⓥⓘⓘ是归纳公理模式，代替了原来的归纳公理。ⓘⓘⓘ和ⓘⓥ，ⓥ和ⓥⓘ分别是加、乘的递归定义。

以上就是形式算术系统（或称形式数论系统，初等数论系统）的出发点，由此就可进行定理的推演了。

哥德尔的不完全性定理不但对上述形式算术系统是成立的，而且一般地对包含自然数算术在内的满足上述的系统组成条件的任一形式系统都是成立的。

二、哥德尔不完全性定理的直观说明

哥德尔不完全性定理是说：如果形式算术系统是一致的，那么它就是不完全的；这就是说，在系统中存在一个具有形式 $(\forall' x) A(x)$ 的命题B，使得B和 $\neg$ B都不是系统的定理。这样的B被称为不可判定的命题。

哥德尔在构造不可判定的命题时，改造了说谎者悖论，用‘可

证性”代替了“真实性”，并用一种巧妙的办法，把形式算术系统中的可证性表达在该系统之中，从而避免了悖论，得到系统不完全的结论。请看以下命题

这个命题在系统中不是可证的（1)

哥德尔在系统中构造了一个命题p，这个命题表达了（1)，它就是不可判定的命题。

如果系统是完全的，则命题p或者它的否定就是系统的定理。如果p是定理，则在直观上p或(1)就是假的，这也就是说，在系统中有一个假定理。同样，如果¬p是定理，则它就是说并非（1)，或p在系统中是可证的。由于¬p是一条定理，它应当是真的，这就导致以下结果：“p在系统中是可证的”与“¬p在系统中是可证的”这两个命题皆是真的。这样，系统就是不一致的了。

下面我们来论述哥德尔在1931和1934年两篇论文中证明不完全性定理的关键步骤。

三、哥德尔配数法

要构造不可判定命题，第一步是要对初始符号、公式（符号序列）和证明（公式的有穷序列）进行配数，这样的数是唯一的，现在被称为符号、公式和证明的哥德尔数。

我们把正整数1—14依次配给以下的常符号：

$\longleftrightarrow$，→，∧，∨，¬，∀，∃，＝，＋，·，’，0，(，)。

对每一个不同的自然数变元配以大于14的不同的素数。例如，x配以17，y配以19，z配以23。

因此，我们在初始符号和正整数的一个子集合之间建立了一一对应的关系。

我们规定，正整数的有穷序列$k_1, \cdots, k_n$对应于单个的正整数：

$$2^{k_1} 3^{k_2} \cdot 5^{k_3} \cdots P_n^{k_n},$$

这里P_i是第i个素数（按数量大小的顺序排列）。

一个公式是符号的有穷序列，对每个公式我们配以一个整数，这个数对应于配给其构成公式的符号的整数序列。例如，在公式 $(\exists z)(z' + x=y)$ 中构成这个公式的12个初始符号的哥德尔数依次为：13, 7, 23, 14, 13, 23, 11, 9, 7, 8, 19, 14。

$$\begin{array}{cccccccccccc} (& \exists & z &) & (& z & ' & + & x & = & y &) \\ | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\ 13 & 7 & 23 & 14 & 13 & 23 & 11 & 9 & 17 & 8 & 19 & 14 \end{array}$$

因此，这个公式的哥德尔数为：

$$2^{13}\cdot 3^{7}\cdot 5^{23}\cdot 7^{14}\cdot 11^{13}\cdot 13^{23}\cdot 17^{11}\cdot 19^{9}\cdot 23^{17}\cdot 29^{8}\cdot 31^{19}\cdot 37^{14}。$$

一个证明是公式的有穷序列，对每一证明我们配以一个整数，它对应于配给其构成证明的公式序列的整数序列。例如，以下两个公式的序列：

$$(\exists x)(x=y'),$$
$$(\exists x)(x=0'),$$

构成一个证明，设已求出第一个公式的哥德尔数为 m，第二个公式的哥德尔数为 n，则这个证明的哥德尔数为：$2^m\cdot 3^n$。

由此，在公式和正整数的一个子集合之间、证明和正整数的一个子集合之间确立了一一对应的关系。

这样，我们就为形式算术系统建立了一种完全"算术化"的方法，使系统中的初始符号、公式和证明同正整数的子集合之间建立起一一对应的关系，当然并非每一正整数都是哥德尔数。如果给出一个表达式，那么与这个表达式唯一对应的哥德尔数便可计算出来。反之，给出一个正整数，我们也能决定它是否为一个哥德尔数，如果它是哥德尔数，那么它所对应的表达式便可得出。

四、形式算术系统元数学的算术化

形式算术系统是一个符号系统，有关它的元数学命题就是关于形式算术系统所用的符号、符号的类别、组合以及符号公式之间关系等等的陈述。

由于形式算术系统的每一表达式都配以一个哥德尔数，因而关于这些表达式及其彼此间关系的元数学命题都可变为关于这些相应的哥德尔数及其彼此间关系的命题，元数学谓词变为哥德尔数的算术谓词。例如：

(1) 元数学谓词"D是一条公理"，我们把它记为AX(D)，相应的算术谓词记为Ax(d)，每一公理都有一个哥德尔数，令15条公理的哥德尔数分别为$\alpha_1, \cdots, \alpha_{15}$，因此Ax(d)的定义为：

$$Ax(d) \equiv d=\alpha_1 \vee d=\alpha_2 \vee \cdots \vee d=\alpha_{15}$$

这里要注意的是，上面的记法属于直观的、非形式的算术，不是形式算术系统中的公式。

(2) 元数学谓词"D是E和F的直接后承"，记为CQ(D, E, F)，相应的算术谓词记为Co(d, e, f)，这个算术谓词的意思是：d, e和f都是公式的哥德尔数，d所表示的公式是e和f所表示的公式的直接后承。这个算术谓词的定义涉及其他一些谓词的定义，这里从略。

(3) 元数学谓词"Y是公式A的一个证明"，记为PF(Y, A)，相应的算术谓词记为Pf(y, a)，意为：y是一个证明的哥德尔数，a是一个公式的哥德尔数，y所表示的证明是a所表示的公式的证明。为了写出Pf(y, a)的定义，我们假定已经定义了算术谓词Pr(y)[相应于元数学谓词"Y是一个证明"]、算术函数Gl(n, x)["x所表示的正整数序列中的第n个分子"(即如果$x=2^{k_1}\cdot 3^{k_2}\cdot \cdots \cdot p_n^{k_n}\cdot \cdots \cdot p_l^{k_l}$则Gl(n，x)是$k_n$)]、L(x)["x所表示的正整数序列中的分子数目"]：

$$Pf(y, a) \equiv Pr(y) \wedge Gl(L(y), y) = a。$$

以上办法叫做"元数学的算术化"，严格来说，应当称为"元数学的语形学的算术化"。我们把形式算术系统的元数学语形学谓词变为相应的算术谓词，目的是要把这些相应的算术谓词表达在形式算术系统之中，从而就把关于形式算术系统的某些元数学命题表达在该系统之中，如果达到了这一目的，不可判定的命题就能

构造出来。但是，为什么与元数学谓词相应的算术谓词能表达在系统之中呢？这是因为它们是原始递归谓词，而原始递归谓词是在形式算术系统中可表达的。哥德尔在证明不完全性定理的过程中引进了原始递归函数的严格定义，这也是哥德尔的重要贡献之一。

五、原始递归函数和原始递归谓词

例如,加法的定义式：

$$a+0=a,$$

$$a+b'=(a+b)';$$

它定义了加法运算，第一个式子给出在值位0时的函数值，第二个式子给出一种方法，指出相应于b′的函数值如何可以由相应于前面值位的函数值而计算出来。如果我们要计算a＋2的值，我们就利用第二个式子把它回归到(a+1)′，为要计算a+1的值，再利用第二式，把它回归到((a+0)′)′，根据第一式得到a＋2=a′′。后继运算是比加法更简单的运算，这不但因为它是一元的而加法是二元的，并且因为历史上它也在加法之先。小孩在懂得加法之前，也知道2是跟着1的。加函数就是一个原始递归函数。粗略地说，对每一组给定的变目值而言，其函数值能通过有穷程序计算出来的函数就是原始递归函数。

从数理逻辑史看，在哥德尔之前已有一些学者使用了原始递归函数。戴德金在1888年已有了原始递归函数这个概念，把它作为加法和乘法递归定义的一种自然的推广。斯科伦在1923年提出了原始递归函数的一种变形——串值递归式。希尔伯特在1925年给出了一种原始递归模式。但在数理逻辑史上，第一次给出原始递归函数精确定义的学者是哥德尔。他在1931年和1934年证明不完全性定理时，使用了原始递归函数，并建立了有关原始递归函数的重要定理。

以下的(1)一(V)定义了函φ：

(I) $\phi(a)=a'$。

这是后继函数，用 S 表示。

(II) $\phi(a_1, \cdots, a_n)=q$（n 是一正整数，q 是一自然数）。

这是常数函数，用 C_q^n 表示。

(III) $\phi(a_1, \cdots, a_n)=a_i$ $(1 \leq i \leq n$, i 和 n 都是正整数)。

这是恒等函数，用 U_n^i 表示。

(I)，(II）和（III）合称初始函数。

(IV) $\phi(a_1, \cdots, a_n)=\psi(x_1(a_1, \cdots, a_n), \cdots, x_m(a_1, \cdots, a_n))$

（n 和 m 是正整数，$\phi, x_1, \cdots, x_m$ 是已给定的算术函数，ψ 是 m 元的，$x_1, \cdots x_m$ 是 n 元的）。

(IV) 被称为代人定义模式，ϕ 被称为 $\psi, x_1, \cdots, x_m$ 的直接依存。

(Va) $\begin{cases}\phi(0)=q \\ \phi(b')=x(b, \phi(b))\end{cases}$ （q 是一自然数，x 是给定的二元函数）。

(Vb) $\begin{cases}\phi(0, a_2, \cdots, a_n)=\psi(a_2, \cdots, a_n) \\ \phi(b', a_2, \cdots, a_n)=x(b, \phi(b, a_2, \cdots, a_n), a_2, \cdots, a_n)\end{cases}$

（n > 1，ψ 是给定的 n-1 元函数，x 是给定的 n+1 元函数）。

(V) 被称为原始递归模式。在（Va）中，ϕ 被称为 x 的直接依存（复合函数）；在（Vb）中，φ 被称为 ψ，x 的直接依存。哥德尔定义原始递归函数如下：

一个函数 φ 被称为原始递归的（哥德尔当时称它为"递归的"），如果存在着函数的一个有穷序列 $\phi_1, \cdots, \phi_k$ $(k \geq 1)$，使得序列中的每一函数或是一个初始函数，或是前行函数的直接依存，结尾函数 ϕ_k 是函数 φ。这个有穷序列现今被称为 φ 的原始递归描述。下面看一个例子。

a+b 的定义式是：

$$\begin{cases}a+0=a \\ a+b'=(a+b)'\end{cases}$$

现把a＋b写成 $\phi(b,a)$:

$$\begin{cases}\phi(0,a)=a\\ \phi(b',a)=(\phi(b,a))'\end{cases}$$

φ的定义如下：

1. $S(a)=a'$——(I)
2. $U_1^1(a)=a$——(III)
3. $U_2^3(b,c,a)=c$——(III)
4. $\chi(b,c,a)=S(U_2^3(b,c,a))$——(IV)
5. $\begin{cases}\phi(0,a)=U_1^1(a)\\ \phi(b'a)=\chi(b,\phi(b,a),a)\end{cases}$ ——(Vb)

$S,U_1^1,U_2^3,\chi,$ φ就是φ的原始递归描述。因此，a＋b是原始递归的。

同样，$a\cdot b, a^b$ 和a！也都是原始递归的。函数sg(a)(sg(0) = $0, sg(a')=1$) 和 $|a-b|$(a减b的绝对值）也可证明是原始递归的。

哥德尔在定义了原始递归函数之后，立即定义了原始递归谓词(哥德尔称它为"递归关系")。

一个函数 $\phi(a_1,\cdots,a_n)$ 是一个谓词 $P(a_1,\cdots,a_n)$ 的表示函数，如果φ只取值0和1，且满足：

$$P(a_1,\cdots,a_n)\equiv\phi(a_1,\cdots,a_n)=0;$$

即当 $P(a_1,\cdots,a_n)$ 真时，$\phi(a_1,\cdots,a_n)$ 是0，当 $P(a_1,\cdots,a_n)$ 假时，$\phi(a_1,\cdots,a_n)$ 是1。

一个谓词 $P(a_1,\cdots,a_n)$ 是原始递归的，如果它的表示函数是原始递归的。

例如，a＝b是原始递归谓词，因为它的表示函数是 $sg(|a-b|)$，而它是原始递归的：

$$a=b\equiv sg(|a-b|)=0。$$

哥德尔证明了以下一些结果：

1. 如果谓词 $P(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $Q(b_1,\cdots,b_n)$ 是原始递归的，

则$\neg P(a_1,\cdots,a_n),P(a_1,\cdots,a_n)\vee Q(b_1,\cdots,b_n)$, $P(a_1,\cdots,a_n)\wedge Q(b_1,\cdots,b_n)$, $P(a_1,\cdots,a_n)\rightarrow Q(b_1,\cdots,b_n)$, $P(a_1,\cdots,a_n)\longleftrightarrow Q(b_1,\cdots,b_n)$是原始递归的。

2. 如果函数 $\phi(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $\psi(b_1,\cdots,b_n)$ 是原始递归的，则谓词 $\phi(a_1,\cdots,a_n)=\psi(b_1,\cdots b_n),\phi(a_1,\cdots,a_n)<\psi(b_1,\cdots,b_n),\phi(a_1,\cdots,a_n)\leqslant\psi(b_1,\cdots,b_n)$ 是原始递归的。

3.如果函数 $\phi(a_1,\cdots,a_n)$ 和谓词 $P(x,b_1,\cdots,b_n)$ 是原始递归的，则有以下性质的谓词 Q, R和函数 ψ 都是原始递归的：

$$Q(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n)$$
$$\equiv(\exists x)(x\leqslant\phi(a_1,\cdots,a_n)\wedge P(x,b_1,\cdots,b_n));$$
$$R(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n)$$
$$\equiv(\forall x)(x\leqslant\phi(a_1,\cdots,a_n)\rightarrow P(x,b_1,\cdots,b_n));$$
$$\psi(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n)$$
$$=(\mu x)(x\leqslant\phi(a_1,\cdots,a_n)\wedge P(x,b_1,\cdots,b_n))。$$

4. 如果函数 $\phi(a_1,\cdots,a_n)$ 的不定值的表达式可由变元 $a_1,\cdots,a_n$,常数 $q_1,\cdots,q_s$ 和函数 $\psi_1,\cdots,\psi_l$ 而给出,并且 $\psi_1,\cdots,\psi_l$ 是原始递归的，则φ就是原始递归的。

哥德尔下一步的工作就是要证明，与形式算术系统的元数学谓词相应的算术谓词是原始递归的。

例如，$Ax(d)\equiv d=\alpha_1\vee d=\alpha_2\vee\cdots\vee d=\alpha_{15};d=\alpha_1,\cdots,d=\alpha_{15}$ 都是原始递归的，因此整个析取式就是原始递归的。

要证明Pf(y, a)[相应于‘ Y是公式A的一个证明，”] 是原始递归谓词,就要证明它的定义项(合取式)是原始递归的,这就要证明 $Pr(y)$ 和 $Gl(L(y),y)=a$ 是原始递归的。哥德尔证明了 $Pr(y),L(y),Gl(n,y)$ 都是原始递归的，因此 $Pf(y,a)$ 是一个原始递归谓词。

六、原始递归函数在系统中的数字可表示性

通过以上几个关键步骤，哥德尔将形式算术系统的一些元数

学谓词化为相应的算术谓词，并证明了它们是原始递归的。下一步如果能证明原始递归谓词可在系统中表达，那么关于系统的元数学命题‘ 这个命题在系统中是不可证明的”就可在系统中表达，不可判定的命题就可构造出来。这在哥德尔的证明中是极其重要的一步。现在我们就来说明这一步。

在形式算术系统中有形式符号 $0,0',0'',0''',\cdots$ 它们相应于直观的自然数0, 1, 2, 3, ⋯ 我们把 $0,0',0''$，⋯称为数字，用 z_0，z_1,z_2，⋯表示。小写正体字母u, v, w是语法个体变元，代表系统中的任一自由个体变元。下面先引进两个定义。

令 $\phi(a_1,\cdots,a_n)$ 是自然数函数，我们说 $\phi(a_1,\cdots,a_n)$ 在形式算术系统中是数字可表示的,或者说形式的函数表达式 $P(u_1,\cdots u_n)$ 数字表示了 $\phi(a_1,\cdots,a_n)$，如果对每一组给定的自然数 $m_1,\cdots,m_n$ 而言，$P(z_{m_1},\cdots,z_{m_n})=z_{\phi(m_1,\cdots,m_n)}$ 是形式可证的；换句话说,如果 $\phi(m_1,\cdots,m_n)=k$，则 $P(z_{m_1},\cdots,z_{m_n})=z_k$ 是形式可证的。

令 $R(a_1,\cdots,a_n)$ 是自然数谓词，我们说 $R(a_1,\cdots,a_n)$ 在形式算术系统中是数字可表达的，或者说系统中的公式 $H(u_1,\cdots,u_n)$ 数字表达了 $R(a_1,\cdots,a_n)$,如果对每一组给定的自然数 $m_1,\cdots,m_n$ 而言，当 $R(m_1,\cdots,m_n)$ 是真的，我们能形式地证明 $H(z_{m_1},\cdots,z_{m_n})$；当 $R(m_1,\cdots,m_n)$ 是假的，我们能形式地证明 $\neg H(z_{m_1},\cdots z_{m_n})$。

哥德尔简要地证明了原始递归函数在系统中的数字可表示性和原始递归谓词在系统中的数字可表达性。

后继函数 a' 用 w' 表示，因为对每一自然数n，可以形式地证明 $z_n'=z_{n'}$。这根据上面的记法直接可以得出。

常数函数 $\phi(a_1,\cdots,a_n)=q$ 在系统中被 z_q 表示。

恒等函数 $\phi(a_1,\cdots,a_n)=a_i$ 被 u_i 表示

在代人定义模式中，如果 $G(w_1,\cdots,w_m)$ 表示 $\phi(a_1,\cdots,a_m)$，$H_i(w_1,\cdots,w_n)$ 表示 $\chi_i(a_1,\cdots,a_n)$，则 $G(H_1(w_1,\cdots,w_n),\cdots,$

$H_m(w_1,\cdots,w_n))$ 表示 $\phi(a_1,\cdots,a_n)$。同样，原始递归模式也为系统中的一个形式的函数表达式所表示。

由此可得：原始递归函数在形式算术系统中是数字可表示的。

如果 $R(a_1,\cdots,a_n)$ 是一个原始递归谓词，则有一个原始递归函数 $\phi(a_1,\cdots a_n)$ 使得：若 $R(a_1,\cdots,a_n)$ 真，则 $\phi(a_1,\cdots,a_n)=0$；若 $R(a_1,\cdots,a_n)$ 假，则 $\phi(a_1,\cdots,a_n)=1$。因此，系统中有一个形式的函数表达式 $H(u_1,\cdots,u_n)$ 表达 $\phi(a_1,\cdots,a_n)$。公式 $H(u_1,\cdots,u_n)=0$ 表达 $R(a_1,\cdots,a_n)$，因为若 $R(m_1,\cdots,m_n)$ 真，则 $H(z_{m_1},\cdots,z_{m_n})=z_0=0$ 是形式可证的；若 $R(m_1,\cdots,m_n)$ 假，则 $H(z_{m_1},\cdots,z_{m_n})=z_1$，因而 $\neg(H(z_{m_1},\cdots,z_{m_n})=0)$ 是形式可证的。由上可得：原始递归谓词在形式算术系统中是数字可表达的。

七、不可判定命题的形式结构

在以上一些步骤完成之后，哥德尔着手构造不可判定命题。他首先引进一个代人函数。设公式 $(\exists x)(x=y')$ 的哥德尔数为 m，而自由变元y有哥德尔数为19。在这个公式中，以m的相应的数字 z_m 替代哥德尔数为19的自由变元y，得到公式 $(\exists x)(x=z'_m)$，这个公式也有一个哥德尔数，它是从哥德尔数为m的公式中，以 m 的数字 z_m 替代哥德尔数为19的自由变元所得公式的哥德尔数。这就唯一地确定了一个数，该数是m和19的一个算术函数。假定原公式为A，包含自由变元y，所得公式记为

$$\text{Subst}\,[A^y_{z_m}],$$

此公式的哥德尔数记为 $Sb(m^{19}_m)$，简记为：Sb(m,m)。

代人函数是相当复杂的，这里我们略加分析。上面说过，$(\exists x)(x=y')$ 的哥德尔数为m，它的具体数值如下：

$$m=2^{13}\cdot 3^7\cdot 5^{17}\cdot 7^{14}\cdot 11^{13}\cdot 13^{17}\cdot 17^8\cdot 19^{19}\cdot 23^{11}\cdot 29^{14}。$$

设 $(\exists x)(x=z'_m)$ 的哥德尔数为n，在此公式中，先将 z_m 写成

$0\overbrace{'''\cdots'}^{m个}$，故该公式为：

$$(\exists x)(x = 0\overbrace{'''\cdots'}^{m+1个}),$$

它的哥德尔数n为：

$$n = 2^{13}\cdot 3^{7}\cdot 5^{17}\cdot 7^{14}\cdot 11^{13}\cdot 13^{17}\cdot 17^{8}$$
$$\cdot 19^{12}\cdot 23^{11}\cdot 29^{11}\cdot 31^{11}\cdot\cdots\cdot P^{14}_{m+10},$$

其中 P_{m+10} 是第（m＋10）个素数。在n中，含有m的全部素因子，此外尚有其他更多的素因子，但其中无一素因子有19次方幂。n是从m中将n中方幂为19的素因数换为其他的素数，它们各以不等于19的一些数为其方幂。n是m和19的一个算术函数。由此显然可见，$Sb(m\,^{19}_{m})$ 即 $Sb(m,m)$ 是一个原始递归函数。

一般地，我们用Sb(a, b)表示代人函数，它是在哥德尔数为 a 的公式（含有自由变元w）中，以b的数字 z_b 替代自由变元w所得的公式的哥德尔数。如果变元w在原公式中不出现，则

$$Sb(a,b) = a。$$

由于 $Sb(a,b)$ 是原始递归的，因而在形式算术系统中是数字可表示的，令表示Sb(a, b)的形式函数表达式是S(u, v)。

上面已经证明，pf(y, a)［相应于谓词‘Y是公式A的一个证明’］是原始递归的，因而在系统中就是数字可表达的，令表达它的公式为 B(u,v)。

在形式算术系统中构造以下公式：

$$U(w):(\forall v)\neg B(v,S(w,w)),$$

令这个公式的哥德尔数为p。在上述公式中，以p的数字 z_p 去替代w的一切自由出现，得到以下公式：

$$U(z_p):(\forall v)\neg B(v,S(z_p,z_p)),$$

根据代入函数Sb(a, b)的定义，$U(z_p)$ 的哥德尔数应为Sb(p, p)。这里，哥德尔使用了理查德悖论中所用的方法，即康托尔的对角线方法。

$U(z_p)$ 即 $(\forall v)\neg B(v,S(z_p,z_p))$ 就是不可判定命题。由于 $S(z_p,z_p)$ 数字表示 $Sb(p,p)$, $B(u,v)$ 数字表达 $Pf(y,a)$，因而 $U(z_p)$ 表达了直观的算术公式：

$$(\forall x)\neg Pf(x,Sb(p,p));$$

它的意思就是；所有自然数都不是以 $Sb(p,p)$ 为哥德尔数的公式的证明的哥德尔数，即以 $Sb(p,p)$ 为哥德尔数的公式是不可证的，而 $U(z_p)$ 的哥德尔数正是 $Sb(p,p)$,因此，$U(z_p)$ 是一个断定了自身不可证性的公式，也就是说，$U(z_p)$ 在系统中表达了 "$U(z_p)$ 在系统中不是可证的 " 这一个元数学命题。

八、不可判定命题与说谎者悖论的关系

哥德尔在论文中指出，他的不可判定命题与理查德悖论、说谎者悖论有联系，但又避免了悖论。他在1934年的讲演中，对不可判定命题与说谎者悖论的关系作了详细的论述。

我们在讲逻辑类型论时曾讲到说谎者悖论，这一悖论可表述为"：我正在说的这句话是假的 ",设引号内的话记为A,则 $A \equiv A$ 是假的。如果A真则A假；如果A假则A真。这一悖论是怎样产生的呢？我们假定已给定了某种语言，A是该语言中的话，但是" A是假的 " 这句话却是比该语言的' 层次 " 高的语言中的话，说谎者悖论混淆了这两个不同' 层次 " 的语言，把A等同于A是假的。

由此可见，真假概念不能在形式算术系统中表达。设 $T(z_n)$ 意为；哥德尔数为n的公式是真的。现考察公式：

$$\neg T(S(w,w)),$$

设它的哥德尔数为p。因此，公式 $\neg T(S(z_p,z_p))$ 的哥德尔数为 $Sb(p,p)$； 但这一公式是说哥德尔数为Sb(p, p) 的公式是假的，所以， $\neg T(S(z_p,z_p))$ 是断定了自身为假的公式。这就导致了与说谎者悖论相似的矛盾，因而 $\neg T(S(z_p,z_p))$ 不能在形式算术系统的公式序列中，它是比系统内的公式高一层的公式。

哥德尔从说谎者悖论得到启发，他领悟到真实性与可证性是

两种不同的概念，说谎者悖论表明“某种语言中的假话”不能表达在该语言之中。他巧妙地用可证性来代替真实性，构造了不可判定的命题$U(z_p)$，把“$U(z_p)$在系统中不是可证的”这个元数学命题在形式算术系统中用$U(z_p)$来表达。在形式算术系统无矛盾的情况下，可以证明$U(z_p)$和$\neg U(z_p)$皆不可证，即$U(z_p)$是不可判定的。由于$U(z_p)$不可证，因而“$U(z_p)$在系统中不是可证的”这个元数学命题就是真的，从而在系统中表达这一命题的公式$U(z_p)$也是真的。由于$U(z_p)$既是真的又是不可判定的，因而系统就是不完全的。在构造不可判定命题时从真实性转到可证性，这就使在说谎者悖论中出现的矛盾到了这里被消除了，所得到的只是系统的不完全性的结论。

九、哥德尔不完全性定理的证明

在哥德尔的证明中，需要引用形式算术系统的ω一致性（或称ω无矛盾性）的概念。

一个形式系统是ω一致的，如果有一个公式F使得：$F(z_0)$, $F(z_1)$, $F(z_2)$, … ；$\neg(\forall v)F(v)$并非全都可证。否则，系统就是ω不一致的。显然，ω一致性蕴涵简单一致性，因为只要令F是一个不包含自由变元的公式，ω一致性的定义就变为简单一致性的定义（即如果有一F，并非F和$\neg$F同时可证）。但逆之不真，这就是说，一个系统可以是简单一致的，但可能是ω不一致的。简单一致性不能排除$F(z_0)$, $F(z_1)$, …，；$\neg(\forall v)F(v)$皆可证这样一种矛盾，因为在系统内没有一条规则使得由$F(z_0)$, $F(z_1)$, …全可证得到$(\forall v)F(v)$也可证，事实上$(\forall v)F(v)$比$F(z_0)$, $F(z_1)$, $F(z_2)$, …要强。引进ω一致性正是为了排除上述的矛盾。

哥德尔对不完全性定理作了如下陈述：

如果形式算术系统是简单一致的，则$U(z_p)$不是可证的；如果系统是ω一致的，则$\neg U(z_p)$不是可证的。因此，如果系统是ω一致的，则它就是不完全的，$U(z_p)$就是一个不可判定的命题。

证明：

(1) 如果形式算术系统是简单一致的，则U(z_p)不是可证的。

假定U(z_p)可证，它就有一个证明，其哥德尔数为k，则有$P_f(k, Sb(p,p))$。因为$S(u,v)$表示$Sb(a,b)$，$B(u,v)$表达$P_f(y,a)$，所以，$B(z_k, S(z_p, z_p))$是可证的。又由假定$U(z_p)$即$(\forall v)\neg B(v, S(z_p, z_p))$可证，根据全称消去规则可得：$\neg B(z_k, S(z_p, z_p))$是可证的。这样，在系统中就包含一个矛盾。由此可得结论：如果系统是简单一致的，那么$U(z_p)$不是可证的。

(2) 如果系统是ω一致(从而简单一致)的，则$\neg U(z_p)$不是可证的。

据(1)，$U(z_p)$不可证，这就是说，没有一个数是$U(z_p)$的证明的哥德尔数，而$U(z_p)$的哥德尔数为$Sb(p,p)$，因此，$P_f(0, Sb(p,p))$，$P_f(1, Sb(p,p))$，$P_f(2, Sb(p,p))$，…皆假，表达在系统中就是：

$\neg B(z_0, S(z_p, z_p))$，$\neg B(z_1, S(z_p, z_p))$，$\neg B(z_2, S(z_p, z_p))$，…皆可证。

根据系统的ω一致性，可得：

$\neg(\forall v)\neg B(v, S(z_p, z_p))$即$\neg U(z_p)$不是可证的。

上述定理现在称为哥德尔第一不完全性定理，它还有一条系定理或称哥德尔第二不完全性定理。这条定理是说：

如果形式算术系统是简单一致的，则不能用系统内的形式化方法来证明它。

哥德尔简要地勾画了这一定理的证明大纲。

“形式算术系统是简单一致的”这个断言可以用系统中的一个公式来表达。

令$Neg(a)=\neg A$的哥德尔数，如果a是公式A的哥德尔数；$Neg(a)=0$，如果a不是一个公式的哥德尔数。显然，$Neg(a)=2^{3}\cdot 3^{a}$，它是原始递归的，可用系统中的$N(u)$表示。

“系统是简单一致的”可以写成以下的算术命题：

$$\neg(\exists a)[(\exists b)P_f(b,a)\wedge(\exists c)P_f(c,Neg(a))]。$$

这就是说，不存在一个数a使得：有一数b，b是（哥德尔数为a的）公式A的证明的哥德尔数，并且有一数c，c是公式¬A的证明的哥德尔数。

这个算术命题表达在系统中就是：

$$\neg(\exists u)[(\exists v)B(v,u)\wedge(\exists w)B(w,N(u))]。$$

我们把它记为“Consis”。第二不完全性定理是说，如果形式算术系统是简单一致的，则Consis不是可证的。

在第一不完全性定理的第一部分证明中，直观上证明了：

{系统是简单一致的}蕴涵{U（z_p）不是可证的}。

这个直观证明通过配数法变为算术公式序列，最后一个公式为：

$$\neg(\exists a)[(\exists b)P_f(b,a)\wedge(\exists c)P_f(c,Neg(a))]\rightarrow(\forall x)\neg P_f(x,S_b(p,p))。$$

我们可以把上述的直观证明在系统中形式化，这个形式证明的最后公式就是系统的一个定理：

$$Consis\rightarrow U(z_p)。$$

若Consis可证，据分离规则，可得U（z_p）可证，这与第一不完全性定理的第一部分矛盾。所以，我们得到第二不完全性定理。

哥德尔在1934年的讲演中，除了选择形式算术系统来证明不完全性定理之外，还将这一定理推广到一般的“形式数学系统”。这样的系统需满足以下5个条件：

1. 假定符号和公式用相似于上述形式算术系统所用的方式加以计数，则公理的类和直接后承关系将是递归的；

2. 将存在有意义公式z_n（代表自然数n）的某一序列，使得在n和表示z_n的数之间的关系是递归的；

3. 系统具有原始递归函数的数字可表示性和原始递归谓词的数字可表达性；

4. 全称量词消去规则成立；

5. 具有简单一致性和ω一致性。

简单说来，不完全性定理所适用的一般形式数学系统就是包含自然数算术在内的形式系统。

美国数理逻辑学家罗塞尔（J. B. Rosser）在1936年构造了另一个不可判定的命题，取消了ω一致性的要求。这个不可判定的命题比哥德尔的命题复杂，直观表达了"系统是简单矛盾的"。只要假定系统是简单无矛盾的，此命题就不能在系统内得证。这个命题的否定表达了"系统是简单无矛盾的"，据哥德尔第二不完全性定理，它在简单无矛盾的系统内不能得证。因此，如果系统是简单无矛盾的，那么这个命题及其否定皆不可证，即它不可判定。

关于第二不完全性定理，哥德尔只勾画了一个证明大纲，实际做起来并不那么容易，其详细证明首先是由希尔伯特和贝尔纳斯在1939年的《数学基础》第2卷中作出的。

哥德尔的不可判定命题显得不很自然，自从1931年以来，数学家们想在一阶皮亚诺算术中找一个严格数学的、不可证的真命题，不需要把可证性这样的逻辑概念进行配数。1977年，帕里斯(J. Paris）和哈林顿（L. Harrington）在有限组合理论中找到了一个定理，它在皮亚诺算术中不是可证的。这表明哥德尔不完全性定理已越出数理逻辑的范围，对其他数学部门产生了巨大的影响。

十、哥德尔不完全性定理的哲学意义

哥德尔不完全性定理在数理逻辑发展史上具有划时代的意义，它开辟了数理逻辑的新纪元，20世纪30年代的主要成果都是在它的指引下取得的，我们在下一章论述这些成果。我们在这里要说的是，它不但对数理逻辑本身具有重要意义，而且它还具有十分丰富的哲学意义。

（一）丰富了辩证唯物主义的真理观

哥德尔不完全性定理表明，形式算术系统不但是不完全的，而

且是不可完全的；普通自然数算术不能完全包含在一个形式系统中。这就是说，如果把$U(z_p)$作为一条新公理加到形式算术系统中去，那么$U(z_p)$在新系统中就是可证的，但在这个新系统中又可以构造一个新的不可判定的命题，比如说$U'(z_p)$，从而被证明是不完全的。增加最新的不可判定的命题作为一条新公理这种方法可以无限重复下去，但总是得到同样的结果。另一方面，一个形式系统如果是包含算术在内的一致的系统，那么它也就是不完全的和不可完全的，它的一致性也不能用系统中的工具来证明。

由此可见，哥德尔不完全性定理深刻地揭示了形式系统的内在局限性，这种局限性是由形式系统的本质所决定的，是不可克服的。这就丰富和发展了辩证唯物主义的真理观。形式系统的理论是一种具有方法论意义的科学理论，它在现代科学的许多领域内有着广泛的应用，对科学的发展起了巨大的作用，但是我们不应把形式系统理论夸大成为终极真理。形式系统的理论归根结底来自实践，是客观的事物之间条件依赖关系的反映。它是一定历史条件的产物，并在一定的实践范围内经受过检验，因而只能从一定的侧面反映自然界的规律性。这种反映只能是近似的，不完全的，有其严格的适用界限，超出这个界限，形式系统的理论就会失去它的能力。正如列宁所说“：任何真理,如果把它说得‘过火,……,加以夸大，把它运用到实际所能应用的范围以外去，便可以弄到荒谬绝伦的地步，而且在这种情形下，甚至必然会变成荒谬绝伦的东西。”①但是,严格证明了形式系统具有内在局限性,是不是就限制了形式系统理论的发展呢？不是！哥德尔不完全性定理建立本身恰恰是形式公理学和证明论的重大发展，哥德尔在研究不完全性定理的过程中创造性地发展了希尔伯特的元数学思想；另一方面，知道了形式系统具有局限性，就可以更好地发展形式公理学和证明论，人们就不必花费大量的无效劳动去做实际上做不到的事情，

---

①《列宁选集》第四卷，人民出版社1972年版，第217页。

要另外开辟新的研究道路，例如，甘岑在1936年用一种更强的工具——超穷归纳法证明了形式算术的一致性。

我们反对绝对主义，反对把形式系统的理论看成是终极真理，承认形式系统的理论随着实践的发展而发展，同时我们也反对低估和否定形式系统作用的相对主义，承认形式系统的理论是相对真理，包含着绝对真理的成分，是人们认识世界的永恒发展着的绝对真理长河中的一粟。列宁说："唯物主义辩证法无疑地包含着相对主义，可是它并不归结为相对主义，这就是说，它不是在否定客观真理的意义上，而是在我们的知识向客观真理接近的界限受历史条件制约的意义上，承认我们一切知识的相对性。①任何科学真理都是客观的，相对的，又是绝对的。形式系统的理论也是如此。它在数学、计算机理论、控制论和数理语言学等科学部门获得广泛的应用就是证明。

此外，我们也要反对从哥德尔不完全性定理得出不可知论的结论。发现有不能从形式上加以证明的算术真理，并不意味着有永远无法认识的真理，人类的理性有其不可克服的限制，因为人们认识客观真理的途径是很多的，形式系统理论并不是唯一的途径。哥德尔的结论同不可知论是风马牛不相及的。

还有一点值得注意，就是哥德尔不完全性定理揭示了一种新的客观真理的形式，这种真理公开宣称自身具有内在的、本质的、不可克服的局限性。在哥德尔不完全性定理之前所发现的自然科学真理，虽然有其适用界限，超过这个界限就要失去真理性，但是它们在其适用界限内却具有普遍性，这些真理在其适用界限内并不具有局限性，例如牛顿力学在宏观世界就是普遍适用的，欧几里得几何在欧氏空间也是普遍适用的。这是我们通常所见到的一种真理形式。但是，哥德尔的成果表明，形式系统在其适用界限内就有局限性，并且这种局限性经过了严格的数学证明。这是一种崭新

---

①《列宁选集》，第二卷，第136页。

的真理形式。哥德尔不完全性定理扩大了我们认识客观真理的范围，为我们研究客观真理的本质指明了新的方向。

（二）使希尔伯特的证明论思想由假说变为科学

关于这个问题，我们在第十三章第二节曾经讲过。这里略作补充。

希尔伯特的元数学纲领原是一个假说， 哥德尔不完全性定理对它进行了辩证的否定，使它的精华得以发扬光大，使它的缺陷得以克服，从而使它由假说变为科学。这是一个辩证发展的过程。这一过程经历以下三个阶段。

第一，希尔伯特根据大量的数学资料提出了建立证明论的假说。假说的核心是区分对象理论和元理论，将直观的数学理论形式化，变为形式系统，将形式系统作为元数学的研究对象，证明各形式数学系统的一致性，从而确立全部数学的一致性。假说的非本质部分是在证明形式数学系统一致性时要使用‘ 有穷方法 ”。

第二，哥德尔根据希尔伯特的元数学纲领对形式算术系统的完全性、一致性等问题进行研究，得到了不完全性定理。第二不完全性定理表明，不可能用可反映于形式系统内的有穷方法证明系统的一致性，如果要证明一个形式系统的一致性，则在元理论中所使用的推理工具绝不能弱于系统中所使用的推理工具。

第三，根据哥德尔不完全性定理修改希尔伯特原来的方案，取消在元数学中只能用有穷方法的限制。后来甘岑在1936年用超穷归纳法证明了不加限制的形式算术的一致性，进一步证明了哥德尔不完全性定理对希尔伯特方案的修改是科学的。自从哥德尔不完全性定理以来，证明论或元数学已经不是假说，而是经过‘ 纯化 ”了的科学。

（三）揭示了真实性和可证性之间的区别和联系

真实性是语义概念，可证性是语法概念，它们构成一对辩证矛盾。这对矛盾在不同的形式系统中具有特殊性。在一阶逻辑演算中，根据语义一致性定理和语义完全性定理，永真公式（ 普遍有效

式)类是和可证公式(定理)类是相重合的,也就是说,真实性和可证性这两个概念是一致的。但在形式算术系统中，它们是不一致的。哥德尔在构造不可判定命题的过程中，改造了说谎者悖论，说明真实性不能在系统中定义，而可证性却可定义，用可证性代替了真实性就巧妙地避免了悖论。哥德尔澄清了在真实性和可证性问题上所造成的混乱。在这之前，人们普遍相信，真的算术语句与从皮亚诺公理可形式推演的公式是一样的。哥德尔认为，与“可证性”相对比的“客观数学真理”是一个高度超穷的概念，这是他构造不可判定命题的基础。他的不可判定命题是一个真的但却是不可证的算术命题:“真”这个概念的“高度超穷性”就在于它不能在形式算术系统中加以定义。

哥德尔的论述对于概念理论是一种发展。按照辩证唯物主义的观点，概念是事物的本质在思维中的反映，不同的概念反映了事物的不同本质。有些表面上似乎相同的概念，如真实性和可证性，实际上并不相同。我们不应当把表面上似乎相同的概念混为一谈，而应当透过表面现象，抓住这些概念所反映的事物的本质。哥德尔在把说谎者悖论改造成为不可判定命题的时候，就做到了这一点。我们在研究工作中应当要学会这种分析概念的科学方法，以便准确地把握概念，做好工作。

(四)把握住事物之间联系的“中介”

哥德尔不完全性定理深刻地说明，形式算术系统作为对象理论同它的元理论之间有一种奇特的联系，即关于形式算术系统的元数学命题可以表达在该系统之中，从而得到惊人的结果——不完全性定理。这种奇特的联系有一道桥梁——哥德尔配数法。哥德尔应用这种方法，先把形式算术系统的形式对象与正整数之间建立了一一对应关系，继而把关于系统的元数学谓词算术化变为相应的算术谓词，最后把算术谓词表达在系统之中，这样，关于系统的元数学命题就表达在系统之中了。我们认为，哥德尔的配数法和元数学算术化的方法不但显示了绝妙的数学技巧，而且具有

十分重要的方法论意义。列宁说:“要真正地认识事物,就必须把握、研究它的一切方面、一切联系和‘中介’。”①哥德尔的方法提供了一种研究形式系统的“中介”的科学方法,完全符合唯物辩证法的要求。如果我们不能找到一事物和他事物之间联系的“中介”,那么我们就不能真正地认识事物。关于形式算术系统的元数学命题之所以能够表达在该系统之中,就是因为有哥德尔配数法和元数学的算术化这座由此达彼的桥梁。我们把握了形式算术系统的数字可表达性,就对形式算术系统的本质有了更深刻的认识。

(五)为正确解决人和计算机关系指明了方向

美籍数理逻辑学家王浩教授在《哥德尔和维特根斯坦》一文中说:“哥德尔定理也被广泛用来(宁可说被误用来)作出这样的结论,即心智比机器的本领大得多。哥德尔本人当然相信这个结论,但他指出,为要从他的定理推出这个结论,还需有他称作‘唯理派乐观主义’的辅助前提。这个问题与所谓的人工智能的领域有关,在这方面近年来已发表了不少著作。如所预料,这些著作都不同意仓促得出这种贬低计算机的结论。实际上,有人辩解说,哥德尔的解释为人工智能开辟了新的视野。”②有的学者从哥德尔定理得出了人不能被机器模拟的结论。例如,奈格尔和纽曼在《哥德尔的证明》一书中说:“哥德尔的结论对能不能造出具有人脑那样的数学才能的计算机提出了疑问。迄今为止的一切计算机都有一个预先做就在机器中的固定的指令集,这些指令对应着形式化公理过程中进行推理的固定规则。机器就是用一步步地计算来回答问题的,每一步运算都受到做就在机器中的相应指令的控制。然而,哥德尔不完全性定理表明,即使在基本数论中也有数不清的命题是不能用这种公理化方法解决的。无论机器设计得多么好,运算得多么快,它都不能对这些问题作出回答。这一切使人感到,人脑在认识和模拟自已方面有内在的极限。……哥德尔定理表明,人脑的

①《列宁选集》,第四卷,第453页。
②《哲学研究》1981年第3期,第34页。

能力和结构是至今任何非生命的机器所不能比拟的。”①有些学者不同意这样来解释哥德尔定理，例如，斯克里文在《完美的机器人：拟人自动机引论》中说：“奈格尔和纽曼再三强调如下事实：不管给计算机什么公理和推理规则，总有一些数学真理是不能光从这些公理和推理规则中得出来的。这一点也不错。但是他们认为当我们给机器公理和推理规则时，我们就把相应的数学真理的观念给了机器，这是不对的。……正如我们对于一个不可证明的公式能通过将这一公式所表达的内容和有关事实作比较来认识到这一公式为真一样,计算机也会这样做。”②阿尔贝勃接着说“:任何一个熟悉今天的计算机的人都意识到今天的机器智力和人的智力相比是微不足道的。但上面的论述并不是针对现在的计算机的智力而发的，而是要强调，哥德尔理论并不是机器不可能有思维的证明。……很多计算机潜在的智力极限实际上已被一些巧妙的算法所克服了。”@

我们认为，哥德尔本人、奈格尔和纽曼等从不完全性定理中所得出的贬低计算机作用的观点，是不太全面的。斯克里文和阿尔贝勃等的看法基本上是正确的。马克思主义认为，生产工具是人手的延长，计算机是人脑的延伸。计算机模拟人的大脑机能，它是科学发展的自然结果。恩格斯说：“人的思维是至上的，同样又是不至上的，它的认识能力是无限的，同样又是有限的。按它的本性、使命、可能和历史的终极目的来说，是至上的和无限的；按它的个别实现和每次的实现来说,又是不至上的和有限的。”④因此,计算机模拟人的思维的能力也是辩证的，既是无限的，又是有限的。这种矛盾是客观的，只有在‘无止境的人类世代更迭中才能得到解决, 这种矛盾是人的思维和计算机进步的主要扛杆。哥德尔、奈

①转引自阿尔贝勃：《大脑、机器和数学》，商务印书馆1982年版，第125- 126页。
②同上，第127页。
③同上，第127页。
④《马克思恩格斯选集》,第三卷,第126页。

格尔和纽曼只抓住了有限性的一面，否定了无限性的一面。正如王浩教授所说，得出贬低计算机的结论是"误用"了不完全性定理。

美国数学家霍夫斯塔特（D. R. Hofstadter）在1979年写了一本轰动一时的著作《哥德尔，埃舍尔，巴赫——一条永恒的金带》。①埃舍尔（Escher）是当代杰出的画家，巴赫（Back）是古典音乐大师。霍夫·斯塔特对哥德尔不完全定理的意义作了很好的概括。他认为，哥德尔不完全性定理、埃舍尔的画和巴赫的音乐有着惊人的一致性，有一条永恒的金带把它们串连在一起。在客观世界和人的思维中存在着层次性，这些不同层次之间发生"缠绕"，这就是"怪圈"。哥德尔不完全定理就是对象理论和元理论这两个层次的"缠绕"所产生的"怪圈"。霍夫斯塔特认为哥德尔不完全性定理为我们理解自已的思维提供了有益的启示，这就是：思维过程及其物质基础——大脑是包含有极其复杂的层次结构的，上面的层次靠底下的层次来支持，但又返回来影响和控制底层的活动，这些层次间的缠绕是理解思维过程的关键。他认为，人工智能的研究是与研究人类的思维相辅相成的。对于人类思维过程的研究推动了人工智能研究的发展，促使电子计算机模仿越来越多的智力行为。反过来，人工智能的研究也对我们理解思维的过程以有益的启示。人工智能所要解决的核心问题之一就是如何才能填平两种不同层次之间的鸿沟，如何才能构造一个系统既能接受某一个层次的描述又能产生另一个层次的描述。人工智能的研究已经创造了许多"思维模型"，在它们的最高层次可以进行想象、描述类比、遗忘思想、用模糊概念进行操作等等。它们确实依赖于基础硬件的正确功能。从这种意义上讲，它们仍然是"形式系统的具体实例"。但是哥德尔定理对于它们是不适用的。

按照霍夫斯塔特的"层次缠绕"论或"怪圈"论，哥德尔不完全性定理并不意味着计算机不能模拟人的思维，恰恰相反，它为人工

---

① 霍夫斯塔特：《GEB——一条永恒的金带》，乐秀成编绎，四川人民出版社1984年出版。

智能开辟了新的视野。

第四节 选择公理和广义连续统假设的一致性

在第十章，我们曾经简单地提到哥德尔对贝尔纳斯的公理集合论作了改进，成为现在的BG系统。哥德尔建立新的集合论系统，目的是为了证明选择公理和广义连续统假设（对任一α，$2^{\aleph_\alpha}$ $\aleph_{\alpha+1}$）相对集合论其他公理的一致性。哥德尔的结果是在1938至1939年秋季学期，在美国普林斯顿高等研究院作专题讲演时宣布的。主要结果分别以《选择公理和广义连续统假设的一致性》和《广义连续统假设的一致性证明》为题,发表于美国《国家科学院院刊》1938年第24卷和1939年第25卷。1940年普林斯顿大学出版社出版了由布朗记录的讲演稿，书名为《连续统假设的一致性》；此书于1951年第二次印刷，1953年第三次印刷。

哥德尔的成果是在集合论发展史上，自康托尔提出连续统假设以来的最重大的事件。希伯尔特在1925年的《论无穷》一文中，曾提出一个证明连续统假设的计划。后来发现他的证明计划是不能实现的，他错误地认为自然数集合的每一个子集合都是递归集合，其实并非如此，大量子集合都不是递归的。哥德尔比希尔伯特大大前进了一步，使用了崭新的方法。哥德尔在1965年7月8日致范海金诺(J. van Heijenoort)的信中指出了希尔伯特所用的一个引理同他自已的一个定理虽然很类似，但有很大不同，他说：“希尔伯特仅仅考虑严格地可构造的定义，不仅如此，定义运算的超穷迭代只到可构造序数为止，而我不仅对定义中的量词，并且对定义运算的迭代都允许至任何序数，而不管它是不是能定义。在我的证明中，‘可构成集,一词只是在一种很弱的意义下,特别是在‘相对于序数，的意义下才是合理的，这里序数是不服从可构造性的条件的。正是从这个高度超穷的集合论观点来看待情况，我的研究方法中的各种困难才得以克服，并得到了一个相对的有穷一

致性证明。”①由此可见，哥德尔之所以能证明选择公理和广义连续统假设的一致性，是因为他有高度的超穷观点。他把所有序数看成是可以使用的，已给定的，不只是使用可构造的序数，并且允许非可构造的定义。下面我们简要地介绍这一重大成果的证明步骤。②

哥德尔把他的公理集合论系统（由A至D组公理构成，不包括选择公理E）称为 Σ。

首先，他为 Σ 构造一个模型△。模型△的类和集合将构成原系统 Σ 的类和集合的某一子族，模型△的 ϵ 关系将是限于△的类和集合的原 ϵ 关系。△的类和集合被称为可构成的。可构成集是由八个基本运算，对序数进行迭代而产生的。

哥德尔原来的八个基本运算是用类变元X, Y等表示的，但把它们应用于集合就产生新的集合，以下我们用集合变元来表示这八个运算。

$$F_1(x, y)=\{x, y\};$$

$$F_2(x, y)=\{z \mid 有\ r, s\ 使\ z=\langle r, s\rangle$$

并且 $z\in x$ 并且 $r\in s\}$；这就是说 $F_2(x, y)$ 与 y 无关，只依赖 x，其值是由 x 中具有性质 $r\in s$ 的有序对 $\langle r, s\rangle$ 汇集起来形成的。

$$F_3(x, y)=x-y;$$

$$F_4(x, y)=\{\langle r, s\rangle \mid \langle r, s\rangle\in x\wedge s\in y\}$$

$$F_5(x, y)=\{s \mid s\in x\wedge(\exists r)(\langle r, s\rangle\in y)\};$$

$$F_6(x, y)=\{\langle r, s\rangle \mid \langle r, s\rangle\in x\wedge\langle s, r\rangle\in y\};$$

$$F_7(x, y)=\{\langle r, s, t\rangle \mid \langle r, s, t\rangle\in x\wedge\langle s, t, r\rangle\in y\};$$

$$F_8(x, y)=\{\langle r, s, t\rangle \mid \langle r, s, t\rangle\in x\wedge\langle r, t, s\rangle\in y\}。$$

哥德尔下一步的工作是要构造一个可构成域L，它是可构成集所组成的类。哥德尔原来的论述比较复杂，现在的集合论著作

---

①F. G. pp. 368—369.

②参看哥德尔：The Consistefny of the Continuum Hypothesis, Princeton, 1940。

对它作了简化。一个集合称为封闭的，如果它在所有的八个基本运算下是封闭的。对全域V中的一个元素X，我们以Cd(X)表示最小的、封闭的$W \supseteq X$。根据哥德尔的说法，可构成域是如下定义的：

$$L_0 = \phi;$$

$$L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta \text{ 如果}\alpha\text{是一个极限序数；}$$

$$L_{\alpha+1} = P(L_\alpha) \cap Cd(L_\alpha \cup \{L_\alpha\});$$

$$L = \bigcup_{\alpha \in on} L_\alpha。$$

这里"φ"表示空集"；∪"表示广义并 所谓"极限序数α"是指α≠φ并且$\alpha \neq \beta+1$；"$P(L_\alpha)$"表示L_α的幂集；"∩"表示交运算；"∪"表示并运算；"on"表示所有序数组成的类。

上述的定义是用在所有序数上的超穷归纳法作出的，使用了任意序数作逐渐增高的层次，结果得到了一个大得无法再大的集合族。这就是哥德尔所说的"高度超穷的集合论观点"。

有了可构成集的概念，就可得到集合论系统Σ的模型△，在其中，类被解释成可构成类，集合被解释成可构成集，属于关系ϵ_l是限于可构成类的ε关系。模型△的全域记为V_l，它等于可构成集的类L，即$V_l = L$。

哥德尔证明了系统Σ的四组公理对模型△成立。接着，他引进可构成性公理V=L，这是说，每一集合都是可构成的。可以证明，△中的L_l等于L，即$L_l = L$，由于$V_l = L$，因此得到$V_l = L_l$，这就是说可构成性公理V=L在模型△中成立。

最后就是要证明选择公理和广义连续统假设从V=L和Σ推出。

可构成性公理显然可以得出良序定理（等价于选择公理）。$L_0 = \phi$，它显然是良序的 而任何L_α上的良序也都能推广到$L_{\alpha+1}$上的一个良序。由此可见，每一L_α皆可良序。因此，根据可

构成性公理，任何集合皆可良序，即选择公理成立。

为了证明广义连续统假设从V=L和Σ推出，哥德尔证明了以下的一条主要定理(12. 2, 1940)：

$$P(F``\omega_{\alpha})\subseteq F``\omega_{\alpha+1}$$

这里，F是序数上的函数，其值域就是可构成集合的类L。"$F``\omega_{\alpha}$"表示把F限于$\omega_{\alpha}$的值域。这定理是说，$F``\omega_{\alpha}$的幂集包含于$F``\omega_{\alpha+1}$。由此可得：

$$2^{\omega_{\alpha}}=\omega_{\alpha+1}\quad 即\quad 2^{\aleph_{\alpha}}=\aleph_{\alpha+1}$$

至于如何证明12. 2，由于涉及的概念和技术性问题太多，因而我们在这里略去了。

由上面的简略介绍可以看出，哥德尔在数理逻辑发展史上第一个把可构成集的概念引进集合论之中，证明了选择公理和广义连续统假设的相对一致性，取得了在康托尔提出连续统假设以来的第一个大进展。哥德尔的这一成果对以后集合论的发展起了重要的推动作用。

以上四节我们评述了哥德尔在20世纪30年代所取得的几项重大结果，特别是不完全性定理。当然，哥德尔的贡献决不止于此，但仅就这几项就足以说明，他是当代最伟大的数理逻辑学家。20世纪30年代数理逻辑的发展与哥德尔的名字是分不开的，哥德尔的伟大成果在数理逻辑发展史上将永放光芒。下一章我们论述在哥德尔不完全定理的光辉照耀下所取得的一系列成果。

第十五章　哥德尔不完全性定理带来的硕果

哥德尔不完全性定理建立之后，数理逻辑得到飞速发展。本章陈述30年代所取得的几个重要结果，特别是塔尔斯基的语义学和图灵机理论。它们同哥德尔不完全性定理等成果一起构成数理逻辑发展初期的一幅完整的丰收图。

第一节　塔尔斯基论形式语言中的真值概念

塔尔斯基(A. Tarski, 1902 一 1983)，国际著名逻辑学家和数学家，原籍波兰，1945年入美国籍。早年在华沙大学学习时，曾得到华沙逻辑学派主要代表人物卢卡西维茨、列斯尼夫斯基等人的指导。1924年获数学博士学位。1926年任华沙大学讲师，成为华沙学派的主要人物之一。1939年移居美国，1942年任伯克利加利福尼亚大学数学系讲师，1946年起任教授。主要论著有：《形式语言中的真值概念》(1933),《逻辑和演绎科学方法论导论》(1936),《语义学的真值概念和语义学基础》(1944),《初等代数和几何的判定法》(1948),《不可判定的理论》(1953),《逻辑学,语义学，元数学》(1956）等。他是逻辑语义学的创始人，也是模型论的奠基人之一。他在集合论、逻辑演算、数论、代数、几何、判定问题、直觉主义逻辑、模态逻辑等领域中建树颇多。

《形式语言中的真值概念》是塔尔斯基在逻辑语义学方面的代表作。语义学是研究语言表达式和它们的意义之间关系的学科，逻辑语义学则是研究形式语言表达式和它们的意义之间关系的学科。塔尔斯基把逻辑语义学称为形式语言的语义学，把一般的语

义学称为语言的语义学。它们在本质上是一致的，都研究一些共同的语义概念，如满足，指称，真值，可定义性。塔尔斯基说"：语义概念的特征是它们表达了语言表达式同这些表达式所说的对象之间的一些关系，或借助于这些关系，它们刻划了某些类的表达式或其他一些对象。我们也可以说（使用实质指代理论），这些概念用来确立在表达式的名称和表达式自身之间的关系。"①他在《科学语义学的建立》一文中说："我们将把语义学理解为对那样一些概念的考察的总体，这些概念大致说来表达了在语言表达式和这些表达式所指称的对象和事态之间的某些关系。"②他认为，只有形式语言的语义学才能用精确方法构造出来。《形式语言中的真值概念》一文解决了真值概念的定义问题，奠定了逻辑语义学的基础。此文最早由卢卡西维茨在1931年3月21日交给华沙科学学会，耽搁了两年，于1933年以波兰文发表。在这之前，塔尔斯基曾将论文的主要内容于1930年10月8日在华沙哲学会逻辑组作过讲演，题为'同形式演绎系统有关的真值概念"，又于1930年12月15日在波兰哲学会发表讲演，其摘要以《同形式演绎科学有关的真值概念》为题在1931年以波兰文发表。与此同时，他还将主要结果的摘要以德文在1932年发表。1936年第一卷《哲学研究》发表了《形式语言中的真值概念》的德文译本，其抽印本在193，年发表。塔尔斯基在这篇文章中所取得的重要成果是独立于哥德尔1931年的论文的，但他说明，关于在元语言不比对象语言丰富的情况下真值定义问题的否定解决的定理I是与哥德尔的思想有关的。他在论文于1931年3月21日由卢卡西维茨交给华沙科学学会并已被送去付印之后，增写了定理I及其证明大纲，当时哥德尔1931年的论文尚未出来，塔尔斯基只看到了哥德尔1931年论文

---

①Tarski: The concept of Truth in Formalized Languages，此文收入J. H. Woodger编译的Logic, Semantics, Metamathemarics（以下引证此书缩写为L. S. M), Oxford, 1956.此段引文见p. 252.

②同上，p. 401

的摘要《完全性和一致性的一些元数学结果》，这篇摘要于1930年10月23日由汉思（Hans Hahn）交给维也纳科学院，不久被发表。塔尔斯基说，他的定理I一方面是根据他自己的研究，另一方面是根据哥德尔的摘要提出来的。下面我们对塔尔斯基的论文进行评述。①

一、在普遍的日常语言中不能定义真值概念

塔尔斯基的论证是从亚里士多德的古典真值定义出发的。这个定义可以表述为：

(1)真语句是这样的一种语句，它是说事物情况是如此这般的，而事物情况也确实是如此。

塔尔斯基认为，这个表述的直观意义和一般意思是十分清楚的，可以理解的，但其形式不正确。语义定义的任务就在于使这个一般意思更为明确，并使之具有正确的形式。他改用以下形式作为出发点：

(2)x是一个真语句当且仅当p。

为了得到具体的定义，我们在这个形式中以任一语句来代替符号"p"，以这一语句的某一个别名称来代替"x"。如果我们给出一个语句的名称，那么只要假定我们能写下用这个名称所指称的语句，我们就能构造出类型（2）的一个说明。塔尔斯基采用了两种名称，一是引号名称，另外一个是结构摹状名称。引号名称由左右引号和引号中的表达式组成，而此表达式就是该名称所指称的对象。以引号名称"正在下雪"为例，(2)的解释(或部分定义)如下：

(3)"正在下雪"是一个真语句当且仅当正在下雪。

结构摹状名称描述的是，组成由名称所指称的表达式的语词，组成每一单个语词的记号，以及这些记号和语词彼此排列的顺序。在表述结构摹状名称时需要使用个体名称，例如，用"A"，"E"，

①参看L. S. M. pp. 152—278,

“E”，“Jay”，“P”作为字母 a”，“e”，“f”，“j”，“p”的名称。结构摹状名称和引号名称之间可以建立对应关系。例如，对应于引号名称‘snow’(“‘雪’”)，我们有结构摹状名称“由 E1，E2，O，Double-U”等四个彼此相继的字母所组成的一个语词”，这里，“E，”“En”，“O”，“Double-U”分别是字母 s”，“n”，“o”，“w”的个体名称。现在我们用结构摹状名称来构造类型(2)的部分定义：

(4）由三个语词所组成的一个表达式，其中第一个由两个字母 I 和 T按此次序组成，第二个由两个字母I 和E 按此次序组成，第三个由七个字母Es, En, O, Double-U, I, En 和 G 按此次序组成，此表达式为真语句当且仅当it is snowing(正在下雪）。

与(3）和(4）相类似的语句看来是明白的，并完全符合在表述(1）中所表达的“真”这个词的意思，其内容的清晰和形式的正确，一般是无可怀疑的。但是，他证明，在一定条件下，它们可能导致说谎者悖论。

我们用符号“c”作为“写在下面一行的那个语句”的缩写：

c不是真语句。

根据符号“c”的含义，我们可断言：

(α)“c不是真语句”等同于c。

对语句c的引号名称而言，我们对类型(2）作如下解释：

(β)“c不是真语句”是真语句当且仅当c不是真语句。

从前提(α)和(β)，立即得到下述矛盾：

c是真语句当且仅当c不是真语句。

这个矛盾的根源是由于在构成(β）时，我们用自身中包含“真语句”的那种语句，来代替(2)中的符号“p”，这样所得到的一个断定同(3)或(4）相比，就不再能作为真值的部分定义。可是在日常语言中并没有合理的根据来禁止这样的代入。

塔尔斯基接着证明，把类型(3）加以推广来构造真语句的定义也会导致矛盾。由(3)可得到：

（5）对所有p“p”是一个真语句当且仅当p。

但是，（5）不能作为“x是一个真语句”的一般定义，因为对符号“x”的所有可能的代入在这里只限于引号名称。这个限制可由这样的事实而除去：对每一真语句（一般说，每一语句）相应有一个恰好指称该语句的引号名称。因此，由（5）可得：

（6）对所有x，x是一个真语句当且仅当，对某一p，x等同于“p”并且p。

塔尔斯基对（5）和（6）所面临的困难作了分析。引号名称可以像语言中的单词那样进行处理，每一个引号名称就是由引号所封闭的表达式的一个常个体名称，与一个人的专名具有同样的性质，例如，名称‘p’”指称字母表上的一个字母。根据这种解释，类型（3）不能用来作有意义的推广，语句（5）和（6）决不能被接受为这样的推广。在这种解释下，在对（5）进行代入时，我们不能以任何东西去代出现在引号名称中的字母“p”，正如同我们不能在语词“true”中以任何东西去代字母“t”一样。这样，从（5）可得“：p”是一个真语句当且仅当正在下雪；也可得：“p”是一个真语句当且仅当并非在下雪，这就导致矛盾。只从（6）虽然推不出矛盾，但可得到一个显然无意义的结论：字母“p是唯一的真语句。总之，根据以上的解释，（5）和（6）是无意义的。

为了克服上述解释带来的困难，塔尔斯基又考察了另外一种解释，即把引号名称解释成引号函项。出现在（5）和（6）中的表达式‘p’”是一个函项，其变目是一个语句变元，其值是语句的常引号名称。根据这种解释，也会导致矛盾。令符号“c”是表达式“印在下面一行的那个语句”的印刷上的缩写：

对所有p，如果c等同于语句“p”，那么非p。

如果我们把（6）作为真值定义，那么上面的语句就断定：c不是一个真语句。

根据符号“c”的含义，我们可以有：

（α）语句“对所有p，果如“等同于语句“p”，那么非p”等同

于c。

另外，从引号函项的假定可得：

(β）对所有p和q，如果语句‘ p’,等同于语句 q”,那么，p 当且仅当q。

同以前所得到的矛盾一样，这里从(α)和 β)也推出矛盾,具体证明从略。

总之，以上各种方法都不能构造‘ 真语句”的正确的语义定义。塔尔斯基最后考察了一种结构定义，其一般模式如下：一个真语句是这样一种语句，它具有这样那样的结构性质(即有关在表达式的单个组成部分的序列中的形式和排列的性质），或者它可以从这样那样的结构上已描述过的表达式，通过某些结构变换而得到。形式逻辑的一些规律使我们可以从语句的某些结构性质推出它们的真假，或者从某些语句的真假推出其他一些语句的类似性质，这些语句可由前者用各种结构变换而得到。这些形式逻辑的规律可以作为结构定义的出发点。例如，以下一些规律：由下列四个部分组成的每一表达式是一个真语句，其第一部分是语词‘ 如果”，第三部分是语词‘ 那么”，第二和第四部分是同样的语句；如果一个真语句由四部分组成，其第一部分是语词‘ 如果”，第二部分是一个真语句，第三部分是语词‘ 那么”，那么第四部分就是一个真语句。这些是命题演算中的规律。但从自然语言的角度来说，用上述方法并不能达到真语句的一般结构定义。塔尔斯基举出的理由是，自然语言不是某种完成的，封闭的，或有明确界限的东西；它没有规定什么语词可以加到这种语言上去并因此在某种意义上就已潜在地属于这种语言；我们不能从结构上列出那些被称为语句的语言表达式，更不用说区分出它们中的真语句了。因此，在日常语言中不能给出‘ 真语句”的结构定义。

综上所说，在日常语言中是不能定义‘ 真语句”的概念的。塔尔斯基认为，这是由于日常语言的普遍性造成的。他说：“ 日常语言(同各种科学语言相对照）的特征是它的普遍性。如果在其他一

个语言中，出现了不能翻译到日常语言中的一个语词，那么这就会同这种语言的精神不协调了。我们可以断言：‘如果我们能有意义地谈论任何东西的话，那么我们也能在日常语言中谈论它。’如果我们同语义研究相结合要坚持日常语言的这种普遍性，那么我们就必须一致地在这种语言中，除了包容它的语句和其他表达式外,也要包容这些语句和表达式的名称，含有这些名称的语句，以及像‘真语句’,‘名称’,‘指称,等等一类语义表达式。可据以推断，正是日常语言的这种普遍性构成所有语义悖论（如说谎者悖论或非自谓语词的悖论）的主要根源。这些悖论看来证明了在上述意义上是普遍的并且正常的逻辑规律对之成立的每一种语言，一定是不一致的。”①塔尔斯基分析了由类型（2)所引起的说谎者悖论，认为不能存在这样一个一致的语言：通常的逻辑规律对它成立，同时它还满足以下三个条件：(Ⅰ）对出现在这种语言中的任一语句，该语句的一个确定的名称也属于这语言；(Ⅱ)由(2)通过用该语言的任一语句去替换符号“p”，通过用这个语句的一个名称去替换符号“x”所得到的每一表达式被看成是一个语言的一个真语句(;Ⅲ)在该语言中,一个在经验上确立起来的、与(α)同意义的前提可以加以表述，并作为一个真语句而被接受。

最后，塔尔斯基得出结论说:“如果这些意见是正确的，那么正是一致地使用表达式‘真语句’（而这种使用同逻辑规律和日常语言的精神相一致）的可能性看来是十分成问题的，因此，构造这种表达式的一个正确定义的可能性也同样是可疑的。”②

千百年来，人们认为在日常语言中定义真值概念是易如反掌的小事，根本没有去研究这里面究竟会发生什么问题，因此，古典的真值定义流传至今，被视为不可动摇的真理。塔尔斯基的上述论证给人们浇了一瓢凉水，使人们清醒地认识到，在日常语言中给真值概念下定义会导致说谎者悖论。出路何在呢？塔尔斯基改用

①L. S. M. pp. 164—165.
②. L. S. M. p. 165.

形式语言作为研究对象，在区分对象语言和元语言的层次的基础上，解决了在形式语言中真值的定义问题。

二、类演算的形式语言和元语言

塔尔斯基选择了类演算的形式语言作为研究对象，解决了在类演算的元语言中"真语句"的定义问题。

塔尔斯基首先说明了形式语言同元语言的区别。形式语言是一种人工语言，其中每一表达式的涵义由它的形式一义地确定。形式语言的主要部分有：

(α) 初始符号表；

(β) 在由初始符号构成一切可能的表达式中，可用纯粹结构的性质区分出来的表达式称为语句；

(γ) 公理或初始命题；

(δ) 推理规则；可从给定的语句通过应用这些规则所得到的语句称为给定语句的后承。公理的后承称为可证语句或可断定的语句。

同自然语句相比，形式语言不具有普遍性。它们不具有属于语言理论的词项。塔尔斯基说："为此，当我们研究形式演绎科学的语言时，我们总必须明确地区别我们所谈论的语言和我们在其中进行讨论所用的语言，同样也要明确地区别作为我们研究对象的科学和在其中进行研究的那种科学。第一种语言的表达式的名称和表达式之间关系的名称属于第二种语言，后者称为元语言(可包含第一种作为一部分)。对这些表达式的描述，复杂的概念的定义，特别是同一个演绎理论的构造有关的那些概念的定义(如后承,可证语句,可能还有真语句等这些概念),对这些概念性质的确定,是我们称为元理论的第二种理论的任务。"①

塔尔斯基指出，对于一大群形式语言来说，可能给出一种方

①L. S. M P. 167,

法，借此可以构造出正确的真值定义。但是，对这种方法和它所应用到的语言的一般抽象描述是很麻烦的，也是很不清楚的。因此，塔尔斯基用类演算这种形式语言来向读者介绍真值概念的定义方法。

类演算的形式语言是很简单的。它有两种初始符号，即常项和变元。常项有四个否定号"N"，析取号"A"，全称量词"Π"，包含号"I"，它们分别读成："非"，"或"，"对所有"和"包含于"。符号"x'"，"x''"，"x'''"等等是变元，它们可解释成个体类的名称。单个常项和变元，或将这些符号彼此相继排列成符号串，这些都称为表达式。以下四类表达式特别重要（"p"或"q"表示语句或语句函项，"x"或"y"表示变元）：

Np（读为"非p"），

Apq（读为"p或q"），

Πxp（读为"对所有类x，我们有p"），

Ixy（读为"类x包含于类y"）。

以上是类演算的语言，也就是对象语言。现在来看它的元语言。我们的研究属于在这种元语言中所展开的类的元演算。

元语言的表达式有两种。

第一种是具有一般逻辑特征的表达式，它们可以从任何一个充分展开的数理逻辑系统而得到。它们可分为初始表达式和被定义的表达式，这种划分并不重要。在具有一般逻辑特征的表达式中，有以下几类表达式：(1)"非"或"…不是真的"，"或"，"对所有"和"包含于"（符号为"⊂"），这些同类演算的常项具有相同的意义。因此，我们可以把类演算语言中的每一表达式翻译到元语言中。例如表达式"$\Pi x' I x' x'$"可翻译为元语言中的"对所有类a，a⊆a"。(2)从命题演算，谓词演算和类演算中得来的一些表达式："如果…，那么"，"并且"，"对某一（或存在一个）x使得…"；"不包含于"

---

①L. s. M p. 167

（符号为 “$\not\subseteq$”）；“等同于”（符号为“=”）；“不等同于”（符号为“≠”）；“是…的一个元素”（符号为“∈”）；“不是…的一个元素”（符号为“$\bar{\in}$”）；“个体”；“类”；“空类”；“所有使得…的 x 构成的类”，等等。（3）从类的等价理论和基数算术理论领域得来的一些表达式，如“有穷类”；“无穷类”；“类的幂”；“基数”；“自然数”（或“有穷基数与”；“无穷基数”，“0”，“1”，“2”，“<”，“>”，“≤”，“≥”，“十”；“一”，等等（4）从关系逻辑来的一些词项，例如，二元关系 xRy 的前域和后域；在多元关系的情况下不说前域和后域，而说第一域，第二域，…，第 n 域“有序对”“有序三元组，有序四元组，…，有序 n 元组；一多关系；无穷序列；n 项有穷序列；序列 R 的第 k 项（指满足公式 xRk 的唯一的 x），记为 R_k 如此等等。

第二种元语言表达式是具有结构摹状特征的元语宫的专门词项，并因此是类演算语言的具体符号或表达式的名称。首先有“否定号”；“析取号”；“全称量词符号”；“包含符号”；“第 k 个变元”，“由彼此相继的表达式 x 和 y 组成的表达式”，以及“表达式”。前面六个词项可用符号缩写为“ng”，“sm”，“un”，“in”，“v_k”和“$x\frown y$”。借助于这些词项和一般逻辑词项，其他一切具有结构摹状特征的元语言概念都可定义出来。对象语言的每一简单的或复合的表达式在元语言中都有一个类似于日常语言中结构摹状名称的个体名称。例如，类演算语言中的表达式“$NI_{x,x,}$”在元语言中的个体名称是表达式（（$ng\frown in$）$\frown v_1$）$\frown v_2$”。

塔尔斯基引进了五种元语言变元：

（1）“a”，“b”，表示具有任意特性的个体类的名称；

（2）“f”，“g”，“h”，表示个体类的序列的名称；

（3）“k”，“l”，“m”，“n”，“p”，表示自然数和自然数序列的名称；

（4）“t”，“u”，“w”，“x”，“y”，“z”，表示表达式的名称；

（5）“X”，“Y”，表示表达式类的名称。

塔尔斯基下一步的工作就是要构造元语言的公理系统。由于

有两种元语言表达式，因而这个系统包含两种完全不同的语句：一种是一般逻辑公理，它们对于一个充分广泛的数理逻辑系统是足够的；另一种是元语言的专门公理，它们描述了与我们的直觉一致的上述结构摹状概念的某些初等性质。一般逻辑公理可用罗素的一阶谓词演算的公理。第二类公理有以下五条：

公理1. ng，sm，un，和in是表达式，它们之中没有两个是等同的。

公理2. v_k 是一个表达式当且仅当k是一个不同于0的自然数；v_k 不同于 ng, sm, un, in，若 $k \neq 1$ 也不同于 v_l。

公理3. $x \frown y$是一个表达式当且仅当x和y是表达式；$x \frown y$ 不同于ng, sm, un, in，也不同于每一表达式 v_k。

公理4. 如果x, y, z和t 是表达式，那么我们有$x \frown y = z \frown t$当且仅当下列条件之一被满足：(α) $x = z$ 和 $y = t$；(β) 有一表达式u使得 $x = z \frown u$ 和 $t = u \frown y$；(γ) 有一表达式u使得$z = x \frown u$ 和 $y = u \frown t$。

公理5.（归纳原则）令X是满足以下条件的一个类：(α) $ng \in X$，$sm \in X$，$un \in X$ 和 $in \in X$；(β) 如果天是一个不同于0的自然数，则 $v_k \in X$；(γ) 如果 $x \in X$ 和 $y \in X$，则 $x \frown y \in X$。这样，每一表达式都属于类X。

塔尔斯基在建立了元语言的公理系统之后，紧接着给出了21个定义，主要是关于语句，公理（初始语句），后承和可证语句等概念的定义。这些定义相当于在哥德尔不完全性定理证明过程中，哥德尔所给的元数学谓词的定义。这里，我们把这些定义略去了。

三、在类演算的元语言中"真语句"的定义

塔尔斯基在构造了类演算的形式语言和元语言之后，就着手解决"真语句"的定义问题。为此，他制定了关于定义真值问题的一般表述方法，称为"T约定"。

我们用符号"Tr"表示所有真语句组成的类。

T约定是说，符号“Tr”在元语言中所表述的一个形式上正确的定义将被称为关于真值的一个适当定义，如果它有以下后承：

(a)所有这样的语句：它们是由表达式“$x\in Tr$ 当且仅当 p”经过以所讨论的语言的任一语句的一个结构摹状名称去代符号“x”，以这一语句在元语言中的译文表达式去代符号“p”所得到的；

(β)语句 对任一x，如果 $x\in Tr$，那么 $x\in S$”(即 $Tr\subseteq S$)。这里“$x\in S$”表示“x是一个语句”，塔尔斯基已给出了定义。

T约定的第二部分(β)是不重要的，只要元语言已有了满足条件(a)的符号“Tr”我们就可定义一个新符号“Tr'”它也满足条件(β)，这只要取 Tr' 是类Tr和S的共同部分就行了。

为了构造符合T约定的真值定义，必须使用“满足”这个语义概念。这在塔尔斯基的论文中，编号为定义22。①

定义22．序列f满足语句函项x当且仅当f是类的一个无穷序列，x是一个语句函项，并且这些都满足下述四个条件之一：

(a)存在自然数及和l使得 $x=\iota_{k,l}$ 并且 $f_k\subseteq f_l$(“$\iota_{k,l}$”是元语言表达式，是形式语言中的表达式“$I\underbrace{x_{,,,\cdots,}}_{k个}\underbrace{x_{,,,\cdots,}}_{l个}$”的名称)；

(β)有一个语句函项y使得 $x=\bar{y}$，并且f不满足函项 y(“$x=\bar{y}$”表示“x是y的否定”)；

(Y)有语句函项y和：使得x=y＋z，并且f或满足y或满足z;

(δ)有一个自然数k和一个语句函项y使得 $x=\cap_k y$ 并且与f至多在第k项不同的每一无穷的类序列满足函项 y(“$x=\cap_k y$”表示“x是表达式y在变元 v_k 之下的全称量化式”)。

例如，无穷序列f满足包含关系 $\iota_{1,2}$(即“$I_{x,x_{,,}}$”)当且仅当 $f_1\subseteq f_2$；每一无穷的类序列满足函项 $\iota_{1,1}$(一个类包含于自身)无穷序列f满足函项 $\overline{\iota_{2,3}}+\overline{\iota_{3,2}}$ 当且仅当 $f_2\neq f_3$；函项 $\cap_2\iota_{1,2}$ 和

① L. S. M· p. 193.

$\cap_2 \iota_{2,3}$ 被那些且仅仅那些序列 f 所满足：其中 f_1 是空类，f_3 是全类。

"满足"是一个十分重要的语义概念，指称、可定义性和真值等概念都要靠它来定义。下面我们来看如何用"满足"的概念来定义"真值"。塔尔斯基说："真值的概念可用下法达到。根据定义22和先前所做的直观考察，很容易实现：使是否一个给定的序列满足一个给定的语句函项这个问题仅仅依赖于那些与函项的自由变元对应的序列中的项（按下标）。这样，在极端的情况下，当函项是一个语句并因此不含自由变元时（定义22决不排除这一情况），一个函项被二个序列满足完全不依赖于序列中的项的性质。只留下两种可能性：或者每一无穷的类序列满足一个给定的语句，或者没有一个序列满足它。第一种语句（例如 $\cup_1 \iota_{1,1}$）是真语句（按："∪"是元语言中的存在量词缩写记号，这个语句是说，有一个类，它包含于自身）；第二种语句（例如 $\cap_1 \iota_{1,1}$）因此可称为假语句（按："$\cap_1 \iota_{1,1}$"是说，任一类都不包含于自身）。"①

经过这一番论证，塔尔斯基给出了以下的真值定义：

定义23. x是一个真语句（记为 $x \in Tr$）当且仅当 $x \in S$ 并且每一无穷的类序列满足 x。②

这一定义的形式正确性是无可怀疑的，但它是否也是实质上正确的呢？是否符合T约定呢？塔尔斯基作了肯定的回答：定义23是在T约定的意义上关于真值的一个适当定义，因为它的后承包括这个约定所要求的一切。但是证明起来比较复杂，要将元理论形式化，过渡到元元理论来进行讨论。这里，塔尔斯基用经验方法，举了一些实例来说明定义23的正确性和适当性。

例如，语句 $\cap_1 \cup_2 \iota_{1,2}$ 即"$\Pi x, N I x, N I x,x,,$"。根据定义22，语句函项 $\iota_{1,2}$ 被那些且仅仅那些使 $f_1 \subseteq f_2$ 的类序列 f 所满足，而它的否定即函项 $\iota_{1,2}$ 仅被那些使 $f_1 \not\subseteq f_2$ 的序列所满足。因此一个序

① L. S. M p. 194.
② 同上，p. 195.

列f满足函项$\cap_{2}\iota_{1,2}$，如果每一个与f至多在第二项不同的序列g满足函项$\overline{\iota_{1,2}}$并且$g_1 \not\subseteq g_2$成立。由于$g_1=f_1$并且类g_2可以是任意的，因而只有那些序列f满足函项$\cap_{2}\overline{\iota_{1,2}}$：这些序列$f$使得对任一类$b$，$f_1 \not\subseteq b$。同理可得，序列$f$满足函项$\cup_{2}\iota_{1,2}$（即$\cap_{2}\overline{\iota_{1,2}}$的否定）仅当有一类$b$使$f_1 \subseteq b$成立。此外，语句$\cap_1\cup_{2}\iota_{1,2}$仅被任一序列$f$所满足，如果对任一类$a$，有一个类$b$使$a \subseteq b$。最后，应用定义23，我们得到以下定理：

$\cap_1\cup_{2}\iota_{1,2} \in Tr$当且仅当对所有类$a$有一类$b$使得$a \subseteq b$。

这个定理符合T约定的条件（α）。从以上结果，根据类演算定理，可得：$\cap_1\cup_{2}\iota_{1,2}$是一个真语句。

利用类似的方法，我们可以处理其他每一个语句。塔尔斯基为了使人信服定义23的实质适当性，他研究了从该定义可推出的28条定理，他称它们为“具有特性的一般定理”。例如：

定理1（矛盾律）．对所有语句x，或者$x \bar{\in} Tr$或$\bar{x} \bar{\in} Tr$。这是说，并非x和非x同时是真语句。

定理2（排中律）．对所有语句x，或者$x \in Tr$或者$\bar{x} \in Tr$。

定理3　如果$X \subseteq Tr$，则$C_n(X) \subseteq Tr$；特例是$C_n(Tr) \subseteq Tr$。这里“$C_n(X)$”表示“X的后承”。$C_n(Tr) \subseteq Tr$是说，真语句类的后承包含在真语句类之中。

定理4　类Tr（真语句类）是一致的、完全的演绎系统。

定理5　每一可证语句是真语句，换句话说，$Pr \subseteq Tr$。

定理6　存在不可证的真语句，即$Tr \not\subseteq Pr$。

定理7　类Pr（可证语句类）是一致的，但不是完全的演绎系统。

定理28．为使$x \in Tr$，其必要和充分条件是，x是这样的一个类的后承：它由所有公理连同语句α（按：α是说，每一非空类包含一个单元类作为一个部分）和所有语句$\bar{\gamma}_l$（l是任一自然数按：$\bar{\gamma}_l$是说，并非恰好有l个不同的单元类）所组成。

定理28可以看成是关于真语句的一个纯粹的结构定义，可作

为类演算语句的真假的一般标准。定理28是从定义23转换成的一个等价的定义。

综上所说，塔尔斯基得出以下结论："我们已经对类演算语言成功地做到了对日常语言想做而做不到的事情：即构造关于表达式'真语句'的一个形式上正确和实质上适当的语义定义。"①

四、关于"真语句"定义问题的一般结论

以上是就类演算的语言来定义"真语句"的概念，接着，塔尔斯基把他的成果推广到一般的形式语言。他使用"语义范畴"的概念，对形式语言作了区分。"语义范畴"的概念，原是胡塞尔（E. Husserl）提出的，由华沙学派的列斯尼夫斯基引进演绎科学的研究之中。

两个表达式属于同样的语义范畴，如果（1）有一个语句函项，它包含这些表达式之一；（2）每一个含有这些表达式之一的语句函项在这个表达式被另一表达式替换时，仍是语句函项。

由这个定义可以推出，属于同一个语义范畴的关系是自返的，对称的和传递的关系。语义范畴有：语句函项的范畴，分别包含个体名称，个体类名称，个体之间二项关系名称等等的范畴，表示给定范畴名称的变元（或带变元的表达式）同样属于同一个范畴。如此等等。

语义范畴根据它们的阶进行分类。阶的归纳定义如下：（1）对个体名称和表示它们的变元，指派一阶；（2）在n＋1阶表达式中（n是任一自然数），包括所有那些初始函项的函子：这些函项的所有变目至多为n阶，并且至少有一个变目必有n阶。

凡属于一个给定的语义范畴的表达式具有指派给它们的同样的阶，这样的阶被称为那个语义范畴的阶。另一方面，每一个大于1的自然数可以是许多不同的语义范畴的阶，例如，个体类的名

①L. S. M. pp. 208—209。

称，二元关系、三元关系和多元关系的名称，都是二阶表达式。

根据语义范畴和阶的概念，塔尔斯基区分出四种语言：

(1) 在这种语言中，所有的变元属于同一个语义范畴；

(2) 在这种语言中，包括变元在内的范畴的数目大于1，但是有穷的；

(3）在这种语言中，变元属于无穷多的不同范畴，但这些变元的阶不超过先前给定的自然数n；

(4）含有任意高阶变元的语言。

前三种语言都属于有穷阶语言，第四种语言称为无穷阶语言。有穷阶语言还可根据出现在语言中变元的最高阶划分为一阶语言，二阶语言，等等。第一种语言是最简单的，类演算就是一个典型．

塔尔斯基通过对除类演算之外的第二、三、四种语言的考察，得出了以下的一般结论：①

A. 对每一种有穷阶的形式语言而言，一个形式上正确的并且实质上适当的真语句定义可以在元语言中构造出来，只使用一般逻辑表达式，语言本身的表达式以及属于语言字形学的词项，即语言表达式名称和存在于它们之间的结构关系的名称。

B. 对于无穷阶的形式语言来说，构造这样的定义是不可能的。

C. 另一方面，即使对于无穷阶的形式语言，也有可能一致地、正确地使用真值概念，其方法是把这一概念包括在元语言初始概念的系统中并用公理方法来确定它的基本性质。

塔尔斯基在1933年论文发表前，对论文作了增补，加写了一个“后记”作为第7节。在“后记”中，他对以前所得到的结果作了推广，研究了语义范畴理论的基本原则对之不成立的形式语言。这种形式语言,除有全称量词,存在量词,命题演算的常项之外,仅有

---

①L. S. M pp. 265—266.

个体名称和表示它们的变元，以及有任意多变目的形式语句的函子(包括常项和变元)。在这种语言中“阶”这个概念具有重大作用。对个体名称和表示它们的变元指派0阶。一个任意的初始语句函项的形式语句的函子的阶不再由这个函项的所有变目的阶一义地确定。由于语义范畴理论的原理不再成立，因而同一个记号在两个或更多的语句函项中(其中分别占有同样位置的变目属于不同的阶）起着一个函子的作用。因此，为了固定任一记号的阶，我们必须考虑到在所有语句函项(其中，这个记号是形成语句的函子）中的一切变目的阶。如果所有这些变目的阶小于一个特殊的自然数n，并且如果在至少一个语句函项中出现一个变目，它正好有n一1阶，那么我们就指派给所讨论的函子记号以n阶。阶可以分为有穷的和无穷的。为了对无穷阶记号进行分类，塔尔斯基用了序数的概念．这样，阶的一般定义如下：

一个特殊记号的阶是这样的最小序数：它大于在所有语句函项(上述记号在其中作为形成语句的函子出现）中所有变目的阶。

我们可以对这样的形式语言构造出具有以下性质的元语言：它包含比形式语言所有变元具更高阶的变元。这样，区别有穷阶语言和无穷阶语言就不重要了。

在以上考察的基础上，塔尔斯基把他的结果修改成以下两个论题：

“ A. 对每一个形式语言而言，如果其元语言的阶高于作为研究对象的形式语言的阶，那么你借助于一般逻辑表达式、形式语言本身的表达式和语言字形学的词项，就能在元语言中构造形式上正确的、实质上适当的真语句定义。

B. 如果元语言的阶至多等于形式语言本身的阶，那么就不能构造这样的定义。”①

原来所提出的三个论题中的C，在修改以后的表述中由于有

①L. S. M p. 273.

新的A论题，因而失去了重要性。

A和B两个新论题可推广到其他语义概念。塔尔斯基表述了以下两个论题：

"A"任一形式语言的语义学可以建立起来，作为以适当构造的定义为基础的语言字形学的一部分，但要假定字形学在其中实现的语言比起其字形学是前一种语言的那种语言来具有更高的阶。

B′. 不可能以这样的方式来建立一个语言的语义学：这一语言的字形学语言的阶至多等于这一语言本身的阶。"①

现在我们要问：对形式语言所得的结果对日常语言是否有效呢？塔尔斯基作了肯定的回答。他说："对形式语言所得的结果对日常语言也一定有效，这是由于日常语言具有普遍性：如果我们把某一形式语言所构造的真语句定义翻译到日常语言中，那么我们就得到了关于真值的片断定义，这种定义包括较广的或较狭的一类语句。"②这就是说，没有一个普遍适用于日常语言的真值定义，对日常语言也要分为对象语言和元语言，真值定义是相对于某个给定的语言的,因此是一种"片断定义"。

塔尔斯基阐明的理论，在数理逻辑文献中称为语言层次理论。这一理论不但解决了形式语言中真值概念的定义问题，而且可应用于日常语言，为解决语义悖论提供了一种得力的工具。在说慌者悖论中"命题A"和"命题A是假的"是两个不同阶的命题"假的"这个语词是属于元语言的，悖论的发生在于把这个元语言的语词添加到对象语言之中，从而使命题A断定自身是假的。根据塔尔斯基的理论，这是不许可的。如果"命题A"属于n阶的对象语言，那么，"命题A是假的"就属于n+1阶的元语言，两者不能混淆。说"命题A",就是"命题A是假的",这是毫无意义的。其他语义悖论可仿此加以解决。

①L. S. M PP. 273—274。

②同上，P. 165。

五、塔尔斯基定理及其与哥德尔不完全性定理的关系

塔尔斯基的论题B是对定理Ⅰ的概括。定理Ⅰ是否定性的结果，是塔尔斯基研究无穷阶语言(一般的类理论)时建立的，原来的表述有两部分，现引录如下：

“定理Ⅰ. (1)如果符号 T r("指称一类表达式)在元理论中被定义，那么就有可能从它推出在T约定的条件(a)中所描述的语句之一的否定；(2)假定元理论的所有可证语句类是一致的，那么就不可能根据元理论来构造在T约定的意义上的一个适当的真值定义。”①第二部分是定理Ⅰ的中心内容，是直接从第一部分推出的。塔尔斯基在《后记》中把这一定理作了推广，推广到任何阶的语言。他说：“如果进行研究所用的元语言的阶不超过所研究的语言的阶，那么就不可能对自然数算术可在其中构造的一种语言给出一个适当的真值定义。”②定理Ⅰ及其推广在数理逻辑文献中称为“塔尔斯基定理”。

塔尔斯基在证明这一定理时受了哥德尔在1930年所发表的不完全性定理摘要的影响。现在我们来看看塔尔斯基定理的证明关键步骤。塔尔斯基原来研究的是一般的类理论。所有的属于自然数算术的事实都可在一般的类理论语言中表达。塔尔斯基使用了元语言算术化的方法，把一般类理论语言的表达式同自然数一一对应，从而在表达式上的运算同自然数上的运算之间，每一表达式与一类自然数之间，也建立了一一对应关系，如此等等。因此，元语言在自然数算术中得到一种解释，从而在一般类理论语言中间接也得到解释。这一步骤相当于哥德尔在证明不完全性定理时，通过配数法和元数学的算术化方法，把形式数论系统的元数学命题表达在系统之中。下一步假定在元语言中构造了真值定义，由此可得：无语言获得普遍的特性，而这是在日常语言中产生语

①L. S. M p. 247。
②同上，p. 272.

义悖论的根源。这样，我们就可能在元语言中重新构造说谎者悖论，方法是：在一般类理论语言中构造一个语句x，使与二对应的元语言语句断定：x不是一个真语句。这一步相当于哥德尔使用代人函数，或者说对角线方法，构造断定自身不可证性的不可判定命题。具体证法如下：

设已在元语言中定义了真语句类Tr。相应于这个类有一个自然数类。现在我们考察如下一个表达式（语句函项）：

$$\bigcup_1^3(\iota_n \cdot \phi_n)\bar{\in}Tr。$$

这里"n"是一个三阶变元（个体类的类）指称自然数；"ι_k"是一个语句函项，它断定由它所表示的类等同于数 k；"ι_n"类似。"ϕ"是表示由表达式所构成的无穷序列，其中，一般类理论语言的每一表达式仅仅出现一次，"ϕ_n"表示第。个表达式；"$\bigcup_1^3$"是关于三阶变元n"的语句函项"$\iota_n \cdot \phi_n$"（"由n个元素的个体类组成的类并且 ϕ_n"）的存在量词。

上述语句函项与另一个算术函项"ψ（n）"相对应，因此有下式：

(1) 对任一 n，$\bigcup_1^3(\iota_n \cdot \phi_n)\bar{\in}Tr$ 当且仅当 $\psi(n)$

"$\psi(n)$"可表达在一般类理论的语言中，设"$\psi(n)$" $=$ ϕ_k。在（1）中以"k"代"n"，得到：

(2) $\bigcup_1^3(\iota_k \cdot \phi_k)\bar{\in}Tr$ 当且仅当 ψ（k）。

符号"$\bigcup_1^3(\iota_k \cdot \phi_k)$"指称对象语言中的一个语句。把T约定的条件（a）应用于这个语句，我们得到"$x \in Tr$ 当且仅当P"，这里，"x"被"$\bigcup_1^3(\iota_k \cdot \phi_k)$"代人"户"被"$\psi(k)$"代入（由于符号"$\iota_k$"的涵义，"$\bigcup_1^3(\iota_k \cdot \phi_k)$"意为"有一个。使得n=k并且 ϕ（n）"，简写为"$\psi(k)$"）。由此得到：

(3) $\bigcup_1^3(\iota_k \cdot \phi_k) \in Tr$ 当且仅当 $\psi(k)$。

(2）和（3）矛盾，（2）等价于（3）的否定。定理I的第一部分得证。由此立即得到第二部分。

塔尔斯基定理告诉我们，桌公式类与可证公式类不是一回事，

这正是哥德尔不完全性定理的关键。从塔尔斯基定理可以得到哥德尔不完全性定理。塔尔斯基作了以下的证明。

根据定理 I 的证明，可以得到 T 约定的条件（α）的否定，即得到：

(1) x $\bar{\in}$ Tr 当且仅当 p，

用 Pr（"可证公式类"）代"Tr"得到：

(2) x $\bar{\in}$ Pr 当且仅当 p，

根据 T 约定，语句 x 满足以下条件：

(3) x ∈ Tr 当且仅当 p；

从（2）和（3）立即得到：

(4) x $\bar{\in}$ Pr 当且仅当 x ∈ Tr，

从真值定义可得以下定理（"$\bar{x}$"表示 x 的否定，参考以前讲的定理 1 和 5）：

(5) 或 x $\bar{\in}$ Tr 或 $\bar{x}$ $\bar{\in}$ Tr；

(6) 如果 x ∈ Pr，则 x ∈ Tr；

(7) 如果 $\bar{x}$ ∈ Pr，则 $\bar{x}$ ∈ Tr。

从（4）和（6）得到：

(8) x ∈ Tr，

(9) x $\bar{\in}$ Pr。

由（5）和（8）可得：

(10) $\bar{x}$ $\bar{\in}$ Tr，

由（10）和（7）得到：

(11) $\bar{x}$ $\bar{\in}$ Pr。

（9）和（11）一起表达了：x 是一个不可判定的语句。从（8）可得：x 是一个真语句。这就是哥德尔不完全性定理所断定的内容。

由上可见，塔尔斯基定理与哥德尔不完全性定理有密切的联系。它也是数理逻辑发展史上的一个重要定理，已载入数理逻辑的史册。

六、塔尔斯基的成果的历史意义

塔尔斯基的成果就是他在论文“后记”中总结的论题A和B，及其推广的论题 A′和B′。

论题A（和 A′）是肯定性的，解决了真值概念和其他语义概念的定义问题，这一成果可以概括为“语言层次理论”。论题B（和B′）是否定性的，论证了真值概念和其他语义概念不可定义的条件，这一成果可以概括为“塔尔斯基定理”。

由上面所评述的内容，我们可以清楚地看到，塔尔斯基的成果具有重大的历史意义。他在《形式语言中的真值概念》一文中提出的语言层次理论和真值等概念的不可定义性定理，标志着逻辑语义学的正式建立，解决了数理逻辑中的一些难题，为后来逻辑语义学的发展奠定了基础。塔尔斯基曾对自己工作的意义作了一个小结，他说：“那些习惯于在日常工作中应用演绎方法的哲学家倾向于用蔑视的眼光来看待一切形式语言，因为他们把这些‘人工，构造同自然语言——日常语言作了对比。为此，在许多读者看来，有关形式语言所得到的结果几乎只是大大减少了前述研究的价值。对这种观点，我实在不敢苟同。我认为，§1的考察（按：指对在日常语言中不能定义真值概念的考察）强有力地证明，真值概念（以及其他语义概念）在与正规的逻辑规律结合一起应用日常语言时，不可避免地导致混淆和矛盾。谁想要不顾一切困难，借助精确方法，去追求日常语言语义学，这就必须首先从事对这种语言进行改革的吃力不讨好的任务。他将发现，有必要定义它的结构，克服出现在它当中的语词的歧义，最后把语言分成一系列范围愈来愈大的语言，其中每一个语言与下一个语言的关系如同形式语言与它的元语言之间的关系。”①

华沙学派的著名逻辑学家莫斯托夫斯基（A. Mostowski）说，

---

①L. s. M. p. 267。

塔尔斯基是第一个明白语义学的基本思想能用于形式语言研究的人。他对塔尔斯基的语义学作了中肯的评价:“ 语义学的发展不仅使我们能精确地规定各种直观上就很清楚的元数学概念，还使我们对不完全性问题有了新的眼光。语义学思想简化了哥德尔的论证，又由于表明包含算术的公理化理论既不能定义其自身的满足关系也不能定义另一些语义概念，而补充了哥德尔的定理。总之,无论是在元数学研究的‘ 建设性 ’部分还是在‘ 破坏性 ’部分,语义学确乎有用。”①

我们读了以上两段话，无需再加解释，就可领会塔尔斯基语义学成果的重要意义.

国内有一些学者把塔尔斯基关于形式语言中真值概念的理论翻译成‘ 形式真理论 ”。但是，在使用这个译名时，我们应当牢记，所谓 形式真理论 ’是逻辑语义学,属于具体的逻辑学,本身并不属于哲学的真理论。塔尔斯基研究的是对‘ 真语句 ”这个概念能否下定义、如何下定义的问题,莫斯托夫斯基说‘:塔尔斯基表明,所有语义概念都可以归约为一个基本的概念，即公式的值的概念。 ”②因此，为了避免把逻辑语义学与哲学真理论混为一谈，我主张把塔尔斯基论文中的 truth ’译为 真值(’即真或假),不应译为 真理 ”。有人批评塔尔斯基的真值定义说:“ 塔尔斯基关于真理的定义，从数理逻辑的角度说是正确的，他的错误在于仅从形式方面来考察真理的定义，排斥了真理的客观内容和检验真理的客观标准……塔尔斯基关于真理的定义，也仅仅是从外貌上和亚里士多德的定义相一致，实质上则是不一致的。 ”③这是在中国学术界甚为流行的一种观点，笔者实在不苟同。上述批评的错误在于把塔

---

①莫斯托夫斯基:《 数学基础研究三十年》，华中工学院出版社1983年出版，第31页。

②《 数学基础研究三十年》第24页。

③王守昌和车铭洲著:《 现代西方哲学概论》，商务印书馆，1983年版，第97—98页。

尔斯基关于 真值 ’概念或 真语句 ’概念的语义定义说成是哲学认识论的‘ 真理 ”的定义，批评者基于这种混淆给塔尔斯基的真值定义带上了 从形式方面来考察真理 〃、排斥了真理的客观内容和检验真理的客观标准 ”等几顶帽子，其实这几顶帽子与塔尔斯基的真值定义是风马牛不相及的，逻辑语义学的真值理论根本不研究哲学认识论的真理定义、真理内容和真理的标准问题。当然，真语句和真理也有一定的联系。根据马克思主义的认识论，真理是对客观事物及其规律的正确认识。这种认识，即思想或理论，是观念性的东西，需要用带规律性的真语句来表述。 但对什么是真语句，逻辑语义学和哲学认识论则是从不同方面，用不同方法来进行研究的，因此，真值的语义定义和真理的认识论定义是根本不同的。

最后，我们要指出，塔尔斯基的真值定义，语言层次理论和真值不可定义性定理等成果是符合唯物论的，也是符合辩证法的。关于真值的定义 23 是符合 T 约定的，而 T 约定是古典真值定义即亚里士多德真值定义的精确化，因而具有唯物论的精神。另一方面，在语言层次的链条上， 对象语言和元语言的对立统一关系构成了链条的本质，它们的阶可以相同，也可以不同，由此决定了可否在元语言中定义真值等语义概念，所以，语言层次理论具有辩证法的精神。

第二节 艾尔伯朗—— 哥德尔—— 克林的一般递归函数定义

在历史上，最早作为一整类可计算函数的实例是原始递归函数。哥德尔在证明不完全性定理的过程中使用了原始递归函数，并第一次给出了原始递归函数的精确定义。但是，原始递归函数并没有包括一切可计算函数。下面我们从阿克曼函数讲起。

一、阿克曼函数

希尔伯特在1925年《论无穷》的讲演中提出，是否有些递归式可以定义非原始递归函数呢？阿克曼在1928年的《论实数的希尔伯特构造》中解决了这个问题。①

设 $\phi_0(b,a)=a+b,\phi_1(b,a)=a\cdot b,\phi_2(b,a)=a^b$;并且把这一系列的函数继续由以下的原始递归式而伸展：

$$\begin{cases}\phi_{n'}(0,a)=a\\ \phi_{n'}(b',a)=\phi_n(\phi_{n'}(b,a),a)\ (n\geq 2)\end{cases}$$

假如，$\phi_3(b,a)=a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}$，共有b层指数.

现将 $\phi_n(b,a)$ 作为三元函数 $\phi(n,b,a)$。设a是如下定义的原始递归函数(阿克曼称它为第一层函数)：

$$a(n,a)=\begin{cases}0 & 当\ n=0\ 时\\ 1 & 当\ n=1\ 时\\ a & 其他情形时\end{cases}$$

则以下递归式定义了 $\phi(n,b,a)$:

$$\begin{cases}\phi(0,b,a)=a+b\\ \phi(n',0,a)=\alpha(n,a)\\ \phi(n',b',a)=\phi(n,\phi(n',b,a),a)\end{cases}$$

阿克曼证明了函数 $\phi(n,b,a)$ 不是原始递归的。如果由以上的递归式所定义的函数 $\phi(n,b,a)$ 是原始递归的，那么由它定义出来的一元函数 $\phi(a)=\phi(a,a,a)$ 也将是原始递归的。但当a增大时，$\phi(a)$ 的增加比a的任何原始递归函数更快，正如同 2^a 快于a的任何多项式，这就是说，任给一个原始递归函数φ(a)，都可找到一个自然数c，使得a≥c后有 $\phi(a)>\phi(a)$。由此可知 $\phi(a)$ 及 $\phi(n,b,a)$ 不是原始递归的。匈牙利数理逻辑学家培

特（Peter）在1935年对阿克曼函数作了简化：

$$\begin{cases}\phi(0, y) = y+1 \\ \phi(x+1, 0) = \phi(x, 1) \\ \phi(x+1, y+1) = \phi(x, \phi(x+1, y))\end{cases}$$

由上可见，阿克曼函数是二重递归式，即同时对两个变元而递归，它不是原始递归函数。培特还给出了另外一个例子。已经证明一切原始递归函数集是可数的，当然，一元原始递归函数是可数的。因此由康托尔的对角线方法，它们不能包括所有一元数论函数。如果

$$\varphi_0(a),\ \varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\cdots$$

是对一元数论函数的一种枚举（容许重复），那么 $\varphi_a(a)+1$便是一个不在上述枚举之中的一个数论函数，因而它不是原始递归的。而枚举函数 $\varphi(n, a)$ [即 $\varphi(n, a)=\varphi_n(a)$] 就是一个非原始递归的二元函数，因为 $\varphi_a(a)+1=\varphi(a, a)+1$。枚举函数 $\varphi(n, a)$ 可用二重递归式加以定义（除应用原始递归函数的五个定义模式）。

二、一般递归函数

存在阿克曼函数这一类非原始递归的但可计算的函数，这一事实推动了数理逻辑学家去寻求这类函数的精确定义。

最先提出一般递归函数精确定义的学者是法国的艾尔伯朗(J. Herbrand)。他在1931年的一封致哥德尔的信中，提出了一般递归函数的定义。哥德尔在1934年的讲演《论形式数学系统的不可判定命题》中，根据艾尔伯朗的提议，给出了一般递归函数的定义。

哥德尔说：“如果 φ 表示一个未知函数，$\psi_1,\cdots,\psi_k$ 是已知函数，并且如果各 ψ 和 φ 以最一般的方式彼此代入，而所得表达式的某些对是相等的，那么若所得的函数等式集合对 φ 有一个并且

仅仅有一个解,则 φ 是一个递归函数。”①

哥德尔举了以下的一个例子；

$\varphi(x,0)=\psi_1(x)$

$\varphi(0,y+1)=\psi_2(y)$

$\varphi(1,y+1)=\psi_3(y)$

$\varphi(x+2,y+1)=\psi_4(\varphi(x,y+2),\varphi(x,\varphi(x,y+2)))$。

$\varphi(x,y)$ 就是由 ψ_1,ψ_2,ψ_3 和 ψ_4 通过等式而定义的一般递归函数。

美国著名数理逻辑学家克林 (S. C. Kleene)在1936年发表《自然数的一般递归函数》，对艾尔伯朗和哥德尔给出的定义作了改进。

克林首先给出以下符号：

0（数 0),

S（后继函数），

$w_0,w_1,\cdots$（数变元),

$\rho_0,\rho_1,\cdots(r_0,r_1,\cdots$ 个变目的函数变元，这里 $r_0,r_1,\cdots$是正整数序列），

（,)[括号]，

（逗点),

＝（等号)。

由这些初始符号可以构成表达式。

先看项的定义：$0,w_0,w_1,\cdots$ 是项 如果 $a_1,a_2,\cdots$ 是项，则 $S(a_1),\rho_0(a_1,\cdots,a_{r_0}),\rho_1(a_1,\cdots,a_{r_1}),\cdots$ 是项。

数字是以下表达式之一：o, s(o), S(s(o)), S(S(S(o))), ⋯。

等式的定义：如果a和b是项（并且如果 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 是函数变元，即它们对一组不同的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 而言代表 $\rho_{\alpha_1},\cdots,\rho_{\alpha_n}$）使得 $\sigma_1,\cdots\sigma_n$ 至少有一个出现在a或b中，但除 $\sigma_1,\cdots\sigma_n$ 外没有

①The Undecidable, p. 70.

其他变元出现在a或b中，那么a=b被称为（在 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 中的）一个等式。

等式系就是等式的一个有穷序列。

$S_{b_1 \cdots b_n}^{a_1 \cdots a_n} A|$ 表示在整个A中以 b_i 代 a_i 的结果（$i = 1, \cdots, n$）（如果 $a_1, \cdots, a_n$ 不出现在A中，代入结果就是A本身）。

$E \vdash_{r_1, r_2, \cdots} F$ 表示表达式F可从表达式E通过应用运算规则 $R_{r_1}, R_{r_2} \cdots$ 而推导出来。

运算规则有；

R_1：用 $S_{k_1 \cdots k_n}^{x_1 \cdots x_n} A$ 替换A，这里 $x_1, \cdots x_n$ 是A中的数变元，$k_1, \cdots, k_n$ 是数字。

R_2：从A和 $\sigma(k_1, \cdots, k_s) = k$ 过渡到用k代A中 $\sigma(k_1, \cdots, k_s)$ 的一个特殊出现所得的结果。

R_3：从A和B=C过渡到以C代A中B的一个特殊出现所得的结果。

克林在引进以上一些预备概念的基础上，对一般递归函数给出了以下的精确定义：①

给定函数变元 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$，令 E_j^* 表示 $\sigma_j(k_1, \cdots, k_{s_j}) = k$ 的等式集。函数 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 被等式系（$E_1, \cdots E_n$）递归地定义，如果对每一 $i\ (i = 1, \cdots, n), E_i$ 是在 $\sigma_1, \cdots, \sigma_i$ 中的等式系，对每一形式 $\sigma_i(a_1, \cdots, a_{s_i}) = b$（这里 σ_i 不出现在 $a_1, \cdots a_{s_i}$ 中），使得对一组数字 $k_1, \cdots, k_{s_i}$，确有一个数字k［称为 $\sigma_i(k_1, \cdots, k_{s_i})$ 的值］，$E_1^*, \cdots, E_{i-1}^*, E_i \vdash_{1,2} \sigma_i(k_1, \cdots, k_{s_i}) = k$。一个函数 σ_n 是递归的，如果有这样描述的一个等式系（$E_1, \cdots, E_n$）。

与此定义等价的一个定义是：

函数 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 被E递归地定义，如果E是在 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 中的等式系，使得对每一 $i\ (i = 1, \cdots, n)$ 和每一组数字 $k_1, \cdots, k_{s_i}$ 恰好有一个数字k（称为 $\sigma_i(k_1, \cdots, k_{s_i})$ 的值），对此 $E \vdash_{1,3} \sigma_i$

① The Undecidable, p. 240.

$(k_1, \cdots, k_{s_i}) = k$。一个函数 φ_n 是递归的，如果有这样描述的一个E。①

克林定义的核心是给出了一般递归的一个算法模型，把函数计算看成是等式构成的形式系统的推导。

例如，阿克曼函数是由以下的等式系所定义的一般递归函数：

$$
\begin{cases}
f(0, y) = S(y) & \text{(a)} \\
f(S(x), 0) = f(x, S(0)) & \text{(b)} \\
f(S(x), S(y)) = f(x, f(S(x), y)) & \text{(c)}
\end{cases}
$$

现在我们由这个等式系来求 $\phi(1, 1)$ 的值：

1．先把阿克曼函数 $\phi(1, 1)$ 改写为形式系统中的公式 $f(S(0), S(0))$。

由(c)和 R_1 可得：

$f(S(0), S(0)) = f(0, f(S(0), 0))$

2\. 由(b)和 R_1 可得

$f(S(0), 0) = f(0, S(0)$

3．由(a)和 R_1 可得：

$f(0, S(0)) = S(S(0))$

4．在第2步由第3步和 R_2 可得：

$f(S(0), 0) = S(S(0))$

5．在第1步由第4步和 R_2 可得：

$f(S(0), S(0)) = f(0, S(S(0)))$

6．由(a)和 R_1 可得：

$f(0, S(S(0))) = S(S(S(0)))$

7．在第5步中由第6步和 R_2 可得：

$f(S(0), S(0)) = S(S(S(0)))$

这就完成了从等式系推导 $f(S(0), S(0))$ 的过程。根据推导结果，$\phi(1, 1) = 3$。

---

① 同上，p. 241.

由上可知，原给递归函数是一般递归函数的真子集。一般递归函数有时简称为递归函数。

递归函数的理论是非形式的，直观的，而一般递归函数的定义则是形式的。这里需要严格区别形式系统内部和外部符号体系的不同，不能混淆。克林的1936年定义已注意到这个问题。他在给出了以上第一个定义后立即说：“我们把一个函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_m)$ 理解为在这个定义下是递归的，如果可能用所描述的那种递归等式来定义它，而不管这函数原来是否如此定义。更明确地说，一个给定的函数在这个定义下是递归的，如果存在一个定义中所描述的 $(E_1,\cdots,E_n)$ 在其中 σ_n 可看成是表示 φ。σ_n 可看成是表示 φ，如果 $s_n=m$ 并且在 $k_1,\cdots,k_{s_n}$ 分别是数字 $S(\cdots x_1$ 倍$\cdots S(0)\cdots),\cdots,S(\cdots x_m$ 倍$\cdots S(0)\cdots)$时，定义中‘$\sigma_n(k_1,\cdots,k_{s_n})$ 的值’，是数字 $S(\cdots\varphi(x_1,\cdots,x_m)$ 倍$\cdots S(0)\cdots)$。”①

克林在1952年的《元数学导论》一书中，对1936年的一般递归函数定义作了改进，采用了没有混淆的两套符号体系，这一做法具有很重要的意义。克林明确地建立了递归函数的形式系统。

这个系统的形式符号是 ≔，’(后继者)，0(零)，a，b，c，…，$a_1,a_2,\cdots$(自然数变元)，$f,g,h,\cdots,f_1,f_2,\cdots$(函数字母，即未明指的数论函数的符号)(，)(括号)，’(逗号)。

形式表达式0, 0′，0″，…叫做数字。它们被缩写为"0"，"1"，"2"，…。我们规定："x"，"y"等指定的数字分别相应于"x"，"y"等所指定的自然数。

项包括0，变元，r′这种形式的表达式而r为一项，或 $f(r_1,\cdots,r_n)$ 这种形式的表达式而f为函数字母，$r_1,\cdots,r_n$ 为项（n ≥ 0，当n=0时只写f）

形式表达式r =s（这里r和s是项）是一个等式。等式是该形式系统的唯一的公式。所谓等式系是指等式的一个有穷序列。

---

① The Undecidable, P. 240.

该系统没有公理。推理规则如下：

R_1（代人）：从包含变元 Y 的等式 d 可得这样一个等式，它是在 d 中以一数字 Y 代 y 所得的。

R_2（替换）：由一个不含变元的等式 $r=s$（大前提）及等式 $h(z_1, \cdots, z_p)=z$，h 为函数字母而 $z_1, \cdots, z_p, z$ 为数字（小前提）变到另一等式，由把 $r=s$ 内右端 s 中某个 $h(z_1, \cdots, z_p)$ 的出现（或几个出现）同时地换以 z 而得的。

一个等式 e 从一个等式系 E 的推演（e 就是推演的结尾等式）具有以下三种形式：

e 这里 e 是 E 中的等式之一；

$\frac{W}{e}$ 这里 W 是从 E 而作的推演，e 是 W 的结尾等式的直接后承（据 R1）；

$\frac{W X}{e}$ 这里 W 和 X 是由 E 而作的推演，e 是 W 和 X 的结尾公式根据 R_2 而得的直接后承。如果有一个 E 到 e 的推演，则说 e 可由 E 推演出，用符号表示为 $E \vdash e$。

假定一个 n 元函数 φ 已经在直观上分别从 $m_1, \cdots, m_l$ 元的 $l(\geq 0)$ 个函数 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 加以定义。

现规定在等式系 E 中最后一个等式的第一个（最左边一个）符号是函数字母 f，我们称它为 E 的主要函数字母，用来表示直观的函数 φ。凡出现在 E 的等式右边而不出现在左边的不同的函数字母称为 E 的已给函数字母。假定在 E 中这样的字母有 l 个，并规定 $g_1, \cdots, g_l$ 在预先列出的函数字母中的出现次序分别表示直观的函数 $\psi_1, \cdots, \psi_l$。因此，在等式系 E 中，$f, g_1, \cdots, g_l$ 仅出现在项之中，分别由 n 个变目，$m_1, \cdots, m_l$ 个变目所形成。我们称其余的函数字母为辅助函数字母。

令“$E^{\psi_1, \cdots, \psi_l}_{g_1, \cdots, g_l}$”表示等式 $g_j(y_1, \cdots, y_{m_j})=y$，这里对于 $j=$

$1,\cdots,l$ 以及自然数的所有的 m_j 数组 $y_1,\cdots,y_{m_j}$ 而言，$\psi_j(y_1,\cdots,y_{m_j})=y$（而 $\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_{m_j}$，$\mathbf{y}$ 是相应于数 $y_1,\cdots,y_{m_j},y$ 的数字)。当 $l>0$（及 $m_1+\cdots+m_l\neq 0$）时，这等式集合是无穷的；当 $l=0$（或 $m_1+\cdots+m_l=0$）时，则是空集。

一个等式系 E 递归地从 $\psi_1,\cdots,\psi_l$ 而定义 φ，如果对自然数的每一 n 数组 $x_1,\cdots,x_n$ 而言，有 $E^{\psi_1,\cdots,\psi_l}_{g_1,\cdots,g_l},E\vdash f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$ 当且仅当 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=x$，这里 f 是 E 的主要函数字母，$g_1,\cdots,g_l$ 是 E 的已给函数字母，依照它们在预先指定的函数字母表上的次序而排列，而 $\mathbf{x}$ 是数字。

一个函数是一般递归的，如果有一个等式系递归地定义了它 $(l=0)$。如果一个谓词的表示函数是一般递归的，则该谓词是一般递归的。

由上所说，克林 1952 年的定义与 1936 年的定义实质上是一样的,只不过更加严格,更加精确了。

克林 1936 年的文章在递归论发展史上具有重要意义。它不但给出了一般递归函数的精确定义（现在称为艾尔伯朗一哥德尔一克林定义），而且取得了递归论的一些奠基性结果。

克林利用了哥德尔的元数学算术化方法，把递归函数形式系统算术化。这就是说，把递归函数形式系统的元数学谓词与函数通过哥德尔的配数法变为相应的数论谓词或相应的数论函数，使用哥德尔的方法可以证明，这些相应的数论谓词或相应的数论函数是原始递归的。克林用这种方法证明了以下定理：

每个一般递归函数可用 $\varphi(\mu y[\psi(x_1,\cdots,x_n,y)=0])$ 这种形式来表达,这里 φ 和 ψ 都是原始递归函数［μ 是最小数算子］并且 $(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)(\exists y)[\psi(x_1,\cdots,x_n,y)=0]$。

如果 ψ 是原始递归函数,并且 $(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)(\exists y)[\psi(x_1,\cdots,x_n,y)=0,]$ 那么 $\mu y[\psi(x_1,\cdots,x_n,y)=0]$ 是一般递归函数。

克林的定理表明，一般递归函数和 μ 递归函数是等价的。μ 递归函数是由原始递归函数加人 μ 运算形成的，比原始递归函数

要广。克林证明了μ递归函数类与一般递归函数类是重合的，这是递归论奠基时的一个重要结果。

克林在1936年的文章中，还使用哥德尔的元数学算术化方法，证明了存在着不可解问题的定理。他首先提出，哪些等式系在一般定义下定义递归函数？这个问题是不可判定的。他的证明思路如下：

如果把递归可枚举理解为用哥德尔的方法顺序配给枚举中的等式系的数是递归序列（即一元递归函数的相继的值），那么等式系是不能被递归枚举的，因为从这些数的任一递归序列，我们可以用对角过程加1的方法得到一个新函数的递归定义。如果我们把递归过程理解为有一个对应数的递归函数，其值根据所得结果而为0或1，那么由上面所说的理由，我们不能获得判定哪些等式系定义递归函数的递归过程。由于一个n元的递归函数可表示为这样的形式：$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)(\exists y)[\psi(x_1,\cdots,x_n,y)=0]$，因而我们可以说，在满足某些一般条件的形式系统中包含$(\forall x)(\exists y)[\psi(x,y)=0]$这种形式的不可判定命题，这里$\psi(x,y)$是原始递归函数；否则，形式系统就可用来递归地判定哪些等式系定义递归函数了，这在上面已证明是不可能的。

克林根据哪些等式系定义递归函数这一问题的不可判定性，证明了存在着只用一个量词可定义的非递归函数。

综上所说，我们可以看出，克林1936年的论文直接吸收了哥德尔不完全定理中所使用的方法，建立了递归论发展史上奠基性的一批成果。克林是递归论的创始人之一。下一节，我们要论述第二种算法模型——λ转换演算。

第三节　λ转换演算和丘吉论题

第二节所讲的一般递归函数理论，从数学上严格地定义了直观的能行可计算函数的概念。这一节要讲的λ转换演算和以这种

演算为基础的λ可定义性的概念也从数学上严格地定义了能行可计算性的概念。

λ可定义性的概念首先是由美国著名数理逻辑学家丘吉（A Church）在1933年的论文《逻辑基础的一组公设》中提出的，后来克林在1935年的论文《形式逻辑中的正整数理论》中也提出了这个概念。丘吉在1936年的著名论文《初等数论的一个不可解问题》中重又论述了这一概念，作为他提出的论题和不可判定性定理的理论基础。

一、λ转换演算

这个演算是一个形式系统，它处理的是带一个变目的函数。它的初始符号有：

1. 变元a，b，c，…，它们构成可数无穷集；
2. 三种括号{，}，(，)，[，]。
3. 字母λ。

由这些初始符号构成的任一有穷序列称为公式。

合式公式，自由变元和约束变元的归纳定义如下：

一个单独的变元x是合式公式，x在其中的出现是作为自由变元而出现的如果公式F和X是合式的,则{F}(X)是合式的，x在F或X中作为自由（约束）变元的出现就是在{F}(X)中作为自由（约束）变元的出现；如果公式M是合式的并且x在M中是自由变元，那么λx[M]是合式的，x在λx[M]中的出现是作为约束变元而出现的，并且在m中除x外一个变元y作为自由（约束）变元出现就是在λx[M]中作为自由（约束）变元出现。丘吉还规定了省括号的规则，这里不赘。我们可把公式{F}(X)理解为“变目X的函项F”，λx[M]理解为函项M()，用罗素的记法可记为$M\hat{x}$,例如，λx[φx]意为函项$\varphi\hat{x}$。

如果M和N是两个合式公式，x是一个变元，那么表达式$S_x^N M|$表示在整个M中以N代x的结果。

在合式公式上有以下三种运算：

1. 一个公式的任一部分λx[m]被λy[S^x_y M|]替换，这里y是一个不出现在M中的一个变元。

2．一个公式的任一部分{λx[M]}(N）被S^x_NM|替换,假定m中的约束变元既不同于x又不同于N中的自由变元。

3. 一个公式的任一部分S^x_Nm|（不直接跟着λ）被{λx[M]}(N）替换，假定M中的约束变元既不同于x又不同于N中的自由变元。

这些运算的一个有穷序列称为转换，如果B通过转换可从A得到，我们就说A可转换为B，记为“AconvB”。如果B等同于A或通过单个应用以上三种运算之一可从A得到，我们就说A直接可转换为B。

在演算中，对特殊的合式公式λab·a(b)，λab·a(a(b))，λab·a(a(a(b)))，…可用显定义引进符号1, 2, 3, …作为缩写。上述合式公式是省括号的写法，完全的形式是λa[λb[{a}(b)]]，λa[λb[{a}({a}(b))]]，等等。这样，在系统中，自然数就可形式地表示出来。

包含只应用一次第二种运算而不应用第三种运算的转换称为化归。

如果一个公式是合式的并且不包含{λx[M]}(N）作为一部分，那么它称为范式。如果B是范式并且AconvB，那么B称为A的范式。

原来给定的变元次序a, b, c, …称为它们的自然次序。一个公式称为主范式，如果它是范式，并且在它当中出现的变元没有一个既是自由变元又是约束变元，并且在它当中出现的直接跟随符号λ的变元，当按照它们在公式中的次序排列时，是处于不重复的自然次序之中，从a开始，仅省去出现在公式中作为自由变元的变元。

按照范式和主范式的定义，公式λab·b(a）和λa·a(λc·b

(c))是主范式,而λbc · c(b)和λa · a(λa · b(a))是范式,但不是主范式。公式1, 2, 3, …全是主范式。

丘吉在λ转换演算的基础上，给出了λ可定义性的严格定义：“ 一元正整数的一个函数F称为λ可定义的，如果可能找到一个公式F使得如果F(m) =r 并且m和r是公式，而根据上面的缩写，m和r代表它们，那么{F}(m) conv r。同样，二元正整数的一个函数F称为λ可定义的，如果可能找到一个公式F使得，当F(m, n)=r ，公式{F}(m, n) 可转换为r(m, n, r 是正整数，而m, n, r 是相应的公式）。对三元和更多元的正整数函数照此办理。”①

由以上的λ可定义性的定义可以看出，把公式化归为范式的过程提供了一种算法，这种算法能行地计算λ可定义函数的特殊值。

丘吉和克林在1936年证明了λ可定义函数和一般递归函数是等价的，即每一递归函数是λ可定义的，每一λ可定义函数是递归的。

二、丘吉论题

丘吉在1936年的论文中，提出了著名的论题：

正整数的能行可计算函数等同于正整数的递归函数或正整数的λ可定义函数。

由于递归函数等价于λ可定义函数，上述论题也可简述为：能行可计算函数就是一般递归函数。

这一论题在数理逻辑文献中被称为‘ 丘吉论题。

丘吉论题是不能证明的，因为‘ 能行可计算性 ”是一个日常用的、尚未精确定义的直观概念,而(一般)递归性 ’和 λ可定义性 ”却有明确的数学定义，要证明它们一致，这是无法办到的。事实

① Church: An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory, The Undecidable, p. 93.

上，丘吉论题的功能正在于对“能行可计算性”这个含混的概念给以精确化、严格化。丘吉论题的作用十分显著，它推动了可计算理论的发展，而且直到今天，人们尚未发现反例，所以它在可计算理论中得到广泛的应用。

丘吉论题虽不能证明，但可以给出辩护性的说明。丘吉指出：“有两个很自然地暗示到的方法，但它们也不可能得到比上面所提出的更为一般的能行可计算性的定义。”①这两个方法如下：

1．符号算法的方法。一方面，对每一能行可计算的正整数函数而言，存在着计算其值的算法。另一方面，如果一个函数有计算它的值的算法，那么它就是能行可计算的。例如，设F为一元正整数函数，计算它的值的算法是：给定任一正整数n，我们可获得表达式的一个序列$E_{n1}, E_{n2}, \cdots, E_{nr_n}$；在这个序列中，当$n$给定了，$E_{n1}$就是能行可计算的；当给定了$n$和表达式$E_{nj}, j < i$, E_{ni}就是能行可计算的；当n和所有表达式E_{ni}直到E_{nr_n}都给定了，我们可以能行地知道算法已终止，$F(n)$的值是能行可计算的。

丘吉还用了哥德尔配数法来说明。设序列$E_{n1}, E_{n2}, \cdots, E_{ni}$的哥德尔数分别为$e_{n1}, e_{n2}, \cdots, e_{ni}$，那么上述有穷序列$E_{n1}, \cdots, E_{ni}$的哥德尔数为$2^{e_{n1}}3^{e_{n2}}\cdots p_i^{e_{ni}}$（空序列的哥德尔数用$1$表示）。现定义一个二元正整数函数$G$使得，如果$x$是有穷序列$E_{n1}, E_{n2}, \cdots, E_{nk}$的哥德尔数，那么$G(n, x)$等于$E_{ni}$的哥德尔数（$i=k+1$），或者如果$k=r_n$（即算法在$E_{nk}$中止）则$G(n, x)$等于$10$，在其他情况下$G(n, x)$等于$1$。我们现在定义一个二元正整数函数$H$，使得$H(n, x)$的值与$G(n, x)$的值除以下情况外是同样的：$G(n, x)=10$而在此情况下$H(n, x)=F(n)$。如果算法中的能行可计算性的要求意味着$G$和$H$的能行可计算性，而$G$和$H$的能行可计算性意味着递归性或λ可定义性，那么$F$的递归性或λ可定义性就可直接得到。

---

①The Undecidable, p. 102.

以上的方法是用符号算法来定义能行可计算性。

2. 用形式系统来处理一元正整数函数F的可计算性。在这一形式系统中,公理集是有穷的,如果无穷,那也是可能行枚举的 推理规则集也是如此，每个推理规则都是能行地可施行的运算。我们可以能行地辨认出下列的公式P(x, ω)：它给出变目为x时F的值w，并由它可以能行地确定这一个数w。丘吉给出了以下定义：一元正整数的一个函数F在形式系统中是可计算的，如果系统中有一表达式P，使P(x, ω) 是一条定理当且仅当F(x)=w是真的，这里x和ω是代表正整数x和w的表达式。由于这个形式系统的定理集是递归可枚举的，因而系统中的每一个一元可计算函数也是能行可计算的。

以上是用形式系统来处理函数的能行可计算性。

丘吉的两种处理方法表明，如果在一个形式系统或符号算法中用以定义一个函数的各个运算或规则是一般递归的，那么全体也是一般递归的。

三、丘吉不可判定性定理

丘吉在1936年的论文《初等数论的一个不可解问题》还确立了一条著名的不可判定性定理：初等数论的判定问题是不可解的，在同年的另一篇论文《判定问题注记》中确立了一阶谓词演算的不可判定性。丘吉的这两条不可判定性定理是在哥德尔不完全性定理之后，运用哥德尔的方法所得到的重大成果。下面我们来看这两条定理的证明的关键步骤。

1.初等数论(形式算术)的判定问题是不可解的

丘吉对这一定理的表述原为：如果符号逻辑的任一系统是在哥德尔意义下ω一致的，并且强到足够允许某些相对简单的定义和证明的方法，那么判定问题是不可解的。

丘吉的证明是用λ转换演算进行的。首先需要以下引理：

寻找两个公式A和B的一个递归函数(其值根据A是否可

转换为B而等于2或1）的问题，等价于寻到一个公式C的递归函数，其值根据C有无范式而等于2或1。

还需要以下定理（XVIII）：

不存在一个公式C的递归函数，其值根据C有无范式而等于2或1。

假定：每一合式公式是否有范式，这是能行可确定的。如果这个假定成立，我们就可能行地确定每一合式公式是否可转换为公式1, 2, 3, …之一；因为给定一个合式公式R，我们可以首先确定它是否有范式，如果它有范式，我们就可通过枚举R所转换的公式而得到主范式，并挑出在枚举中的以主范式形式出现的第一个公式，我们就能确定主范式是否是公式1, 2, 3, …之一。令$A_1, A_2, A_3,$ …是具有范式的合式公式的一个能行的枚举。令E是一元正整数函数，定义如下：m和n是分别代表正整数m和n的公式，如果$\{A_n\}(n)$不可转换为公式1, 2, 3, …之一，则$E(n)=1$；如果$\{A_n\}(n)$可转换为m并且m是公式1, 2, 3, …之一，则$E(n)=m+1$。函数E是能行可计算的，因此是λ可定义的，设它用公式E定义。公式E有一个范式，但E不是公式$A_1, A_2, A_3,$ …的任何一个，因为对每一个n，$E(n)$是一个不可转换为$\{A_n\}(n)$的公式。这与枚举序列$A_1, A_2, A_3,$ …的性质（即含有一切具有范式的合式公式）相矛盾，因此原来的假定（即可以能行确定每一合式公式是否有范式）不成立，定理XVIII成立。这就是说，合式公式具有范式这种性质不是递归的。

丘吉在原来的证明中使用了哥德尔配数法，这里不赘述。

从引理和定理XVIII直接可得定理XIX：

不存在两个公式A和B的任一递归函数，其值根据A是否可转换为B而等于2或1。

初等数论的判定问题不可解定理是定理XIX的系定理。简要证明如下：

在初等数论系统中，关于两个正整数a和b（它们是使公式A

直接转换为B的两个公式A和B的哥德尔数）的命题是可表达的。由于一个转换是直接转换构成的有穷序列，因而命题$\psi(a, b)$是可表达的，这里a, b是使A conv B的两个公式A和B的哥德尔数。此外，如果A conv B，并且a和b分别是A和B的哥德尔数，那么命题ψ(a, b)在系统中就是可证的，这个证明就是用哥德尔配数法来展示从A到B的由直接转换组成的一个特殊的有穷序到；如果A不可转换为B，那么系统的ω一致性就意味着ψ(a, b)不是可证的。如果系统的判定问题可解，那就有一种方法，可以能行地确定每一命题$\psi(a, b)$是否可证，因此也就有一种方法，可以能行地确定每一对公式A和B是否A conv B，这与定理XIX相矛盾。①

美国著名逻辑学家罗塞尔在1936年发表了《哥德尔和丘吉的某些定理的推广》一文，一方面将哥德尔不完全性定理中的ω一致性改为简单一致性，另一方面对丘吉定理也作了推广，将ω一致性改为简单一致性，同时改用新的陈述方式，与“一般递归性”的概念联系起来。

丘吉定理可陈述为：如果包含形式数论在内的一个系统P_k是简单一致的，那么就不存在一般地可应用的能行过程来决定一个不含自由变元的公式是不是可证的。②罗塞尔的原证明比较复杂，下面的证明作了改进。③

证明采用反证法。假定P_k是简单一致的，并且存在一个一般地可应用的能行过程来决定一个不含自由变元的公式是不是可证的。现在定义一个函数ψ(m)如下：如果m是系统中可证公式的哥德尔数，则$\psi(m)$为0，否则为1。这样，$\psi(m)$是能行可计算的，根据丘吉论题，它是一般递归的。系统P_k有一重要性

①The Undecidable, p. 107
②同上，p. 235。
③参看Wang Hao: A survey of Mathematical Logic, Science Press, 1962 p. 26.

质：一般递归函数在其中是数字可表示的。设系统中数字表示 $\psi(m)$ 的公式是 $F(x)=y$，这样，对每一 m 而言，如果哥德尔数为 m 的公式是一条定理，则 $F(m)=0$ 是可证的，如果哥德尔数为 m 的公式不是一条定理，则 $F(m)=1$ 是可证的。

现在我们来考察公式 $F(S(i,i))=1$，设它的哥德尔数为 k，则 $F(S(k,k))=1$ 也是系统的一个公式，此公式的哥德尔数为 $\varphi(k,k)$（根据哥德尔的代入函数 $\varphi(x,x)$ 的定义）。

如果 $F(S(k,k))=1$ 是系统的一条定理，即哥德尔数为 $\phi(k,k)$ 的公式是一条定理，则据 F 的性质，$F(S(k,k))=0$ 是可证的［代入函数 $\Phi(x,x)$ 由系统中的公式 $S(x,x)=w$ 表示］，这是一个矛盾。

如果 $F(S(k,k))=1$ 不是定理，即哥德尔数为 $\Phi(k,k)$ 的公式不是定理，则据 F 的性质，$F(S(k,k))=1$ 可证，这也产生一个矛盾。

因此，如果 P_k 有判定程序来确定任一公式是否可证，则系统就是简单不一致的。这就用反证法证明了 P_k 不能有判定程序。

丘吉的不可判定性定理不仅证明了形式算术系统的不可判定性，即形式算术的定理集不可计算，而且证明了形式算术系统的任意的一致扩张也是不可判定的。丘吉定理为研究公理理论的判定问题提示了新的方法（见第六节）。

2 一阶谓词演算的判定问题是不可解的

一阶谓词演算的判定问题不可解定理是上述不可判定性定理的系定理。讲详细一点，这一定理是说，在一阶谓词演算中不存在一个判定程序来确定系统的任一公式是不是可证的。丘吉在1936年的《判定问题注记》中对这一定理作出了证明。①他的证明思路是：

设 A 是形式算术系统中各条算术公理（非逻辑公理）的合取之

①The Undecidable, pp. 110—115.

缩写，F为一公式。F能否在形式算术系统中得证的问题可化归为A→F（如果A则F）能否在一阶谓词演算中得证的问题，即F在形式算术系统中可证当且仅当A→F在一阶谓词演算中可证。如果一阶谓词演算有一般判定程序，那么我们就能判定A→F是不是一阶谓词演算的定理，因而也就能判定F在形式算术系统中是不是可证。但是，这就等于说，形式算术系统有一般判定程序。根据上述定理，这是不可能的。所以，一阶谓词演算的判定问题是不可解的。

丘吉的结果也表明了一阶谓词演算公式集合的各种子集合的不可判定性。每一个这样的子集合都是由含有某些简单前束词的前束范式组成的，后者就是所谓的“归约类”。王浩教授在1962年得到了自丘吉关于一阶谓词演算判定问题不可解的定理以来的一个重要结果：公式（∀x）（∃y）（∀z）M（x, y, z）的类的判定问题是不可解的，即是说，∀∃∀的量词串所确定的前束类是归约类。王浩教授还得到一个推论，∀∀∀∃也是归约类。①

整个说来，一阶谓词演算是不可判定的，但是，有一些特例的判定问题是可解的。在丘吉的结果之前，已有这方面的发现，例如，累文汉在1915年及贝曼（Behmann）在1922年独立地解决了只含0元或1元谓词字母的谓词公式的判定问题，这个结果等价地说就是，一元谓词演算（即只具0元及1元谓词字母的演算）的判定问题是可解的。丘吉定理也促进了对特例的判定问题的研究。这些结果曾由丘吉在1951年的论文《判定问题的特例》和1956年的专著《数理逻辑导论》，以及阿克曼在1954年的小册子《判定问题的可解情况》加以综述。以下是判定问题已获解决的一些谓词公式：

（1）只包含一元谓词变元，

（2）能化归为一个前束范式，其中前束词：

①《数理辑逻通俗讲话》第62—65页。

或 i） 不包含存在量词，

或 ii）不包含全称量词，

或 iii）在全称量词前不包含存在量词，

或 iv） 至多有一个存在量词，

或 v）至多有两个存在量词，并且它们没有被任何全称量词分开。

（3）能化归为一个前束范式，其中：

i）母式（即前束词的表达式）是初等部分及其初等部分否定的析取或者可以化归为这样的一种形式；

或ii）前束词具有形式 $(\exists x_1)\cdots(\exists x_m)(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)$ 并且含有任一变元 $x_1,\cdots,x_m$ 的母式的每个初等部分或者是包含所有变元 $x_1,\cdots,x_m$，或者是包含变元 $y_1,\cdots,y_n$ 之一；

或 iii）前束词以 $(\forall z_1)\cdots(\forall z_n)$ 终结并且含有在前束词中出现的任一变元的母式的每个初等部分至少包含变元 $z_1,\cdots,z_n$ 之一；

或 iv）前束词具有形式 $(\exists x)(\forall y)(\exists z_1)\cdots(\exists z_n)$ $(n\leqslant 4)$，并且母式具有形式 $A(x,y)\rightarrow B(z_1,\cdots,z_n)$，二元谓词变元在 $B(z_1,\cdots,z_n)$ 的完全展开中是唯一的谓词变元。

第四节　图灵机和可机算函数

图灵机器理论是另一种算法模型。它是由英国著名数学家和逻辑学家图灵（A M Turing, 1912-1954）于1936年提出来的。

图灵于1931年入剑桥大学国王学院。1935年完成毕业论文《论高斯误差方程》，因而被选为学院的研究员。1936年至1938年在美国普林斯顿大学丘吉的指导下从事研究工作，取得博士学位。1939年重回学院任研究员。由于第二次世界大战，研究工作中断。 1939年下半年到1948年，图灵在英国交通部和外交部工

作。1945年去英国国家物理实验室，从事自动计算机（ACE）的设计工作。1948年到曼彻斯特大学从事自动数字计算机的设计工作和理论研究工作。他的代表作是《论可机算数，及其在判定问题上的应用》（1936年5月28日《伦敦数学会学报》收到此稿，发表于1936—1937年的42卷）。①图灵在这篇论文中，用一种理想的计算机精确地定义了能行可计算函数，并独立于丘吉，否定地解决了一阶谓词演算的判定问题。图灵所设想的计算机被称为图灵机。下面我们根据图灵的论文，对他的工作进行评述。

一、图灵机的基本概念

图灵机的基本概念集中体现在图灵以下的一段话中："我们可以比较一下在计算一个实数的过程中的一个人同一部机器，这机器只能有有限多个条件$q_1, q_2, \cdots q_r$，称它们为'm布局，（机器布局)。机器附有一条'带子'(类似纸),带子分成段称为'方格,),每个方格可有一个'符号,。在任何一个时刻,只有一个方格,比如说,第r个,具有'在机器中'的符号$\mathfrak{S}(r)$。我们可以称这个方格为'被注视方格'。在被注视方格上的符号可称为'被注视符号,。'被注视符号'可说是机器'直接知道,的唯一东西。然而，通过改变它的m布局，机器能有效地记得它以前曾经'看到'（注视）的某些符号。在任一时刻，机器的可能行为是由m布局q。和被注视符号$\mathfrak{S}(r)$所决定的。对偶q_n $\mathfrak{S}(r)$叫做'布局，：因此，布局决定机器的可能行为。在有些布局中，被注视方格是空的（即没有符号），这时机器在被注视方格上写下一个新的记号：在其他一些布局中，它擦去被注视符号。机器也可以改变被注视的方格，但只是右移或左移。除这些运算外，m布局可以改变。有些被写下的符号将形成数字序列，即被计算的实数小数。其他的只是'帮助记忆，的未完成的记录。这些未完成的记录将容易被擦掉。我

①见The Undecidable, pp. 116—154。

的主张是,这些运算包含一切在计算数中所使用的运算。”①

图灵把完全由布局决定其动作的机器叫做自动机(或a机),简称机器。如果一部自动机印录两种符号,第一种完全由0和1组成,称为数字,其余称为第二种符号,那么这样的自动机称为计算机。在机器动作的任一阶段,被注视方格的数目,在带子上所有符号的完整序列,以及m布局这三者称为那个阶段上的完全布局。在相继的完全布局之间机器和带子的变化称为机器的开动。

图灵的思想实质,正如克林所说,是“把计算员所实施的动作分解成为一些‘原子’动作,使得任何可实施的动作都是这些原子动作的继续。原子动作将是下列动作的合并:认出给定符号的一次出现,擦去这次出现,写下一符号的一次出现,在一给定符号序列上从一个观察点转到邻点,并更改记忆情报。”②

下面我们来看图灵举出的一个例子。

布	局	行为	
m布局	符号	运 算	最终m布局
a	无	P0, R	b
b	无	R	c
c	无	P1, R	d
d	无	R	a

这是一部计算序列010101…的机器。它有四个m布局“a”,“b”,“c”,“d”,可以印“0”和1。在机器的行为中“R”表示“机器是这样开动的,使它注视直接在它先前正注视的方格右边的方格”,将“右边”改为“左边”就是“L”的意思“E”表示“擦去被注视符号”,“P”代表“印”。上面的表以及所有同一类的相继的表有以下含义:对在前两列所描述的一个布局来说,在第三列的运算相继实行,然后机器进入最后一列所描述的m布局。当第二列是空白时,第三列和第四列的行为对任何符号或没有符号都适用。机器在m布局a从一条空白带子开始。

① The Undecidable, pp. 117—118。
② 《元数学导论》第396页。

如果我们允许字母 L, R 在运算列中可以出现一次以上，那么上面定义计算 010101 …序列的机器的表格就可简化为：

m布局	符号	运算	最终m布局
a	无	P0	a
	0	R, PR, P1	a
	1	R, R，P0	a

自从图灵提出了理想的、抽象的计算机理论之后，有些学者对图灵机作了种种改进，这里不赘。图灵当时只限于机算实数 $x(0 \leq x \leq 1)$ 的二进制表达式，各位数字都在单向无穷长的带上每隔一方格而无限制地印出，中间的方格只留作暂时记录，作为继续机算时的草稿。因此，图灵先把‘ 可机算数 ”定义为可用机器写下其十进小数的那些数。然后，他把可机算数的范围推广到可机算的函数。可机算函数亦称图灵可计算函数。

二、可机算函数与λ可定义函数的等价性

图灵在《 论可机算数》一文的附录（ 1936年8月28日加写）中证明了他的可机算性概念等价于λ可定义性。他在1937年的论文《 可机算性和λ可定义性》中又作了详细证明。

表示一个整数 n 的合式公式记为 N_n。第 n 个数字是 $\phi_{\gamma}(n)$ 的一个序列 γ 是λ可定义的，如果 $1+\phi_{\gamma}(n)$ 是 n 的λ可定义函数，也就是说，如果有一个合式公式 M_{γ}，使得对所有整数 n，

$$\{M_{\gamma}\}(N_n) \ \mathrm{conv} \ N_{\phi_{\gamma}(n)+1},$$

也就是说，$\{M_{\gamma}\}(N_n)$ 可转换为 $\lambda xy.x(x(y))$ 或 $\lambda xy.x(y)$（ 按照γ的第 n 个数字是1或0）。

1．为了说明每一λ可定义序列γ是可机算的，我们就要构造一部机器来计算它。

首先在λ转换演算中，将变元 a，b，c，…改为 x, x′, x″，…。现要构造一部机器 L，当供给公式 M_{γ} 时,写下序列γ。 L的结构有点象机器K的结构（ 机器K证明了一阶谓词演算的所有定理）。首先构造一部选择机 L_1，如果供给一个合式公式（ 比如说M）并

适当操作，就得到M可转换成的任一公式。L_1可加修改以便产生一个自动机L_2，它相继地获得M可转换成的所有公式。机器L包含L_2作为一个部分。机器L的动作当供给公式M_γ时被划分为一些节段，其中第n个节段就是寻找γ的第n个数字。在这个第n个节段的第一阶段就是形成$\{M_\gamma\}(N_n)$。然后把这个公式供给机器L_2，这机器相继地把它转换成各个其他公式。在它可转换的公式中的每一公式最终都出现，并且每一个都与以下公式相匹：

$$\lambda x[\lambda x'[\{x\}(\{x\}(x'))]]\text{ 即 }N_2,$$
$$\lambda x[\lambda x'[\{x\}(x')]]\text{ 即 }N_1。$$

如果它与第一个等同，那么机器就印出数字1，第n个节段就完成了。如果它等同于第二个，那么就印出0，第n个节段就完成了。如果它与这两个公式都不同，那么L_2的工作就继续进行。据假设，$\{M_\gamma\}(N_n)$可转换为公式N_2或N_1之一；因此，第n个节段最终是要完成的，也就是说，γ的第n个数字最终是要写出来的。

2．现在需要证明每一可机算序列γ是λ可定义的，这就要说明：如何找到一个公式M_γ使得对所有整数n，

$$\{M_\gamma\}(N_n)\ \text{conv}\ N_{1+\phi_\gamma(n)}。$$

证明从略。①

由于λ可定义性等价于一般递归性，因而可机算性（图灵可计算性）亦等价于一般递归性。

三、图灵论题

图灵在1936年的论文中提出了一个著名论点：所有很自然地被认为可计算的函数都是可机算函数。②由于刚才所说的几种算法模型之间的等价性，图灵论题等价于丘吉论题。现在在文献中常把这两个论题合而为一，称为丘吉图灵论题。

图灵在1936年的论文中对他的论题作了辩护性证明，主要的

①参看The Undecidable, pp. 150—151。
② The Undecidable, p. 135.

思想是：一个计算员所能做的任何动作都可以分解为一连串的某些图灵机的基本动作。

四、一阶谓词演算的判定问题不可解

图灵在1936年的文章中，独立于丘吉，也否定地解决了一阶谓词演算的判定问题。他的原话是这样说的：“不可能有一个一般的过程来决定函项演算K的一个给定公式 是不是可证的，也就是说，不可能有一部机器，在供给这些公式U的任一个公式U时，将最终说 出是不是可证的。”①

图灵的证明思路是：相应于每一部计算机M，构造一个公式U·(M)，该公式直观的意思是：“在m的某个完全布局中，0出现在带子上”；然后证明以下两条引理：

引理1 如果0在M的某个完全布局中出现在带子上，则Un(M)是可证的，

引理2 如果Un(M)是可证的，则0在M的某个完全布局中出现在带子上；

现假定判定问题可解，则有一个一般的机械过程来确定Un(M)是不是可证的。据两条引理，这蕴涵着有一个过程来确定是不是M总印0，而这是不可能的。因此，判定问题不可解。

五、图灵机理论的历史意义

图灵机理论是在哥德尔不完全性定理之后最重要的数理逻辑成果之一。图灵的工作对“机械程序”或“算法”的概念作出了精确的分析，从而可以给出“形式系统”概念的精确定义。这在数理逻辑发展史上是具有重大历史意义的大事。哥德尔对此有很高评价。他在1964年为1934年的讲演写的后记中说：“由于后来的进展，特别是由于图灵的工作可以给出形式系统一般概念的精确

①同上，p·145。

而又无疑地适当的定义，因而不可判定的算术命题题的存在和一个系统的一致性在同样系统中的不可证性，现在能够对包含一定量有穷数论的每一个一致的形式系统加以严格的证明。图灵的工作对‘机械程序’(别名‘算法’或‘计算程序,或‘有穷组合程序,)的概念作出了分析。这个概念被表明是等价于‘图灵机,的概念的。”①哥德尔根据图灵的成果，把一个形式系统定义为产生可证公式的任一机械程序。把形式系统与机械程序联系在一起，这对揭示形式系统的本质是很重要的。

另外，图灵可计算性(可机算性)或一般递归性的概念还有一个重大的历史意义，即它们第一次给出了不依赖所选择的形式体系的认识论观念的绝对定义。哥德尔1965年在普林斯顿关于数学问题的二百周年大会上说道：“在我看来，这种重要性主要是由于以下事实：人们用这个概念第一次成功地给出了一个令人感兴趣的认识论观念的绝对定义，即不依赖于所选的形式体系的定义。而在先前所处理的所有其他场合，例如可证明性或可定义性，人们只能相对于一个给定的语言定义它们，并且对每一个别的语言，显然这样所获得的定义并不是所寻求的那一个定义。然而对于可机算性概念，虽然它只是一个特殊种类的可证明性或可定义性，但情形却大不一样。由于一种奇迹，它不需要区别层次，并且对角线方法不导致越出所定义的概念之外。”②

我们在上面说过，图灵机理论是一种算法模型，是一种抽象的、理想的计算机理论。因此，图灵机同现代的电子计算机是大不一样的。但是，算法模型特别是图灵机理论对现代计算机的研制有巨大的推动作用。我们可以说，图灵机是电子计算机的理论模型。1946年2月，世界上第一台电子计算机——ENIAC(电子数字积分机和计算机)问世。ENIAC有一个最大的缺点：程序没有象数据一样存入存贮器。每解一个问题，都需要事先按照程序用手把

①The Undecidable, pp. 71—72.
②同上，p. 84。

相应的电路接通，这种工作往往需要几个人干许多天。这一问题后来为著名数理逻辑学者和现代电子计算机的奠基人冯·诺意曼所解决。1946年冯·诺意曼提出了“存贮程序”的概念，并领导研制了一台实验性的电子数字计算机——JO NI CA，从而使电子计算机具备了现代计算机的基本模式。因此现代计算机仍然称作冯·诺意曼型计算机。冯·诺意曼在20年代大力从事数理逻辑的研究，在40年代从事电子计算机的研制时，把30年代中数理逻辑的成果特别是图灵机的成果充分加以吸收，从而为现代电子计算机的研制作出了开创性的贡献。包括图灵机理论在内的可计算性理论现在已经成为整个计算机科学的基础理论，是计算机科学家不可缺少的工具。

第五节　波斯特的符号处理系统

我们在本节论述美国著名数理逻辑学家波斯特（E. L. Past, 1897一1954）在递归论建立初期所作出的重要贡献。

一、波斯特机

波斯特独立于图灵，于1936年发表《有穷组合过程。表述I》（《符号逻辑杂志》1936年10月7日收到此稿，1936年第1卷发表），提出了类似图灵机的设想，但比图灵的表述要简略。我们可以称波斯特的计算过程理论为波斯特机。波斯特在论文的一开头说：“本文的表述将证明，在符号逻辑沿着哥德尔关于符号逻辑的不完全性定理和丘吉关于绝对不可解问题的结果的路线向前进展中是有意义的。”①这就是说，波斯特的机器理论是与哥德尔不完全性定理和丘吉不可判定性定理有密切的联系，并且对这两条定理所开辟的研究方向具有重要意义。下面我们介绍波斯特机的主

①The Undecidable, p. 289.

要概念。

由问题的叙述而导至答案的工作必须在某个“符号空间”内进行。符号空间由空间或盒子的一个双向无穷序列组成，类似于整数数列…, －3, －2, －1, 0, 1, 2, 3,…。问题解答员或工作者在这个符号空间动作。在一个时间只在一个盒子内进行运算。盒子可能是空的或无标记的，也可能在它当中有单个标记，比如说垂直竖记号。与“符号空间”同样重要的一个概念是一个固定不变的指令集，它不但指导符号空间的运算，而且决定应用指令的次序。

我们可以选出一个盒子，称为起点。假定以符号形式给出一个特殊问题，它是由带一个竖记号的有限多个盒子组成的。以符号形式给出的答案是有标记盒子的一个布局。工作员可以做以下动作：

(a) 在他所在的盒子内（假定是空的）画出标记，

(b) 在他所在的盒子内（假定有标记）擦去标记，

(c) 移动到他右边的盒子，

(d) 移动到他左边的盒子，

(e) 确定他所在的盒子是不是有标记。

指令集具有以下形式。

开头是：在起点开始并且遵照指令1。然后它由编号为1, 2, 3,…, n的有限多个指令组成。第i个指令具有以下形式：

(A) 施行运算O_i[O_i=(a), (b), (c)，或(d)]，然后遵照指令i_i；

(B)施行运算(e),并按照答案是“是”或“否”相应地遵照指令i_i'或i_i''；

(c)停止。

波斯特说：“一个指令集将称为可应用于一个给定的一般问题，如果在它应用于每一特殊问题时，它决不在工作者所在的盒子有标记时指令进行运算(a)，或无标记时指令进行运算(b)。可应用于一般问题的一个指令集当应用于每一特殊问题时，构成一个

决定性过程。这个过程将终止当且仅当它达到类型(c) 的指令。指令集称为构成同一般问题相联的一个有穷的1一过程，如果它应用于问题并且如果它决定的过程对每一特殊问题都终止。同一般问题相联的一个有穷的1一过程称为问题的1—解，如果它对每一特殊问题这样产生的答案总是正确的。”①

一般问题的组成至多有可数无穷的特殊问题。在正整数类和特殊问题类之间建立起一一对应关系。我们可在起点的右边，把前n个盒子加上标记，用以表示正整数n。由此，波斯特引进1—给定这个概念。他说:“ 一般问题称为1一给定的，如果构成了一个有穷的1一过程，当应用于这样符号化了的正整数类时，这个过程以一一对应方式产生组成一般问题的特殊问题类。”②

以上就是波斯特机的基本概念。这里，符号空间相当于图灵机的带子，符号空间中的盒子相当于方格，问题解答者实行的指令相当于图灵机的内部布局。可见，波斯特机与图灵机类似，也是一种算法模型。波斯特认为，他的有穷组合过程所能计算的函数是一般递归的。他作了以下的简要证明:首先，定义一个函数，称为1—函数$f(n)$，在正整数域中的一个1—函数$f(n)$是这样一个函数，对于它可建立一个有穷的1一过程，这个过程对作为问题的每一正整数n将产生$f(n)$作为答案;然后将这一定义与一般递归函数的定义比较，说明它们是等价的。

波斯特的有穷组合过程理论虽不及图灵机理论完整，但它在数理逻辑发展史上有其应得的地位，它是早期图灵机理论中的一个组成部分。波斯特在1947年对图灵机理论作了改进，对促进图灵机理论的现代化作出了贡献。

二、波斯特的符号处理系统

波斯特的符号处理系统也是一种算法模型，与一般递归函数

①The Undecidable, p. 29.

②同上。

和图灵机是等价的。

波斯特在1920年开始了符号处理系统的研究，初步思想见于1921年发表的《初等命题的一般理论导论》，成熟的思想发表于1943年的《一般组合判定问题的形式化归》。1944年,他在论文《递归可枚举的正整数集及其判定问题》中作了进一步的说明和补充。

波斯特的系统有其特点。首先，它不是以自然数为基础，而完全是符号演算；其次，它不具有机械装置的表现形式。波斯特系统包括由符号构成的字母表和推理规则。

波斯特指出，很广泛的一类形式系统都能表达在一个标准形式中，他称它为典范形式。典范系统的公式只是个体符号的有穷序列，也就是符号串。典范系统由三部分组成：字母表，初始公式，和程序规则（即推理规则）。程序规则具有以下形式，称为“产生式”。

$$g_{11}P_{i'_1}g_{12}P_{i'_2}\cdots g_{1m_1}P_{i'_{m_1}}g_{1,m_1+1}$$

$$g_{21}P_{i''_1}g_{22}P_{i''_2}\cdots g_{2m_2}P_{i''_{m_2}}g_{2,m_2+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_{k1}P_{i^{(k)}_1}g_{k2}P_{i^{(k)}_2}\cdots g_{km_k}P_{i^{(k)}_{m_k}}g_{k,m_k+1}$$

产生

$$g_1P_{i_1}g_2P_{i_2}\cdots g_mP_{i_m}g_{m+1}$$

各个g在任一特殊规则中都是固定的若干符号串（可能空）；各个P是可变的符号串；出现在最后一行中的每一P必须出现在前面行的至少一行中。由此可见，像这样用典范形式所表达的程序规则实质上是一个推理模式。例如，分离规则（$A, A\rightarrow B, \therefore B$）用波斯特的典范形式可写成：

$$gPg_1$$

$$g_1Pg_2Qg_1$$

产生

$$g_1 Q g_1$$

这里，g_1 代表空符号串，g_2 代表由单个符号→组成的符号串，P和 Q 代表合式公式的任一符号串。

典范系统中的产生规则称为构成此系统的基B，这些规则在形式上可能很复杂。

波斯特在1943年证明，对任何典范系统，都可以构造一个正规系统（典范系统的特殊情形），可以进行相同的计算。正规系统的特点是，程序规则只具有以下的简单类型：

gP

产生

$P g'$

这里，g和g，是固定的符号串，P是可变的符号串。

在把典范系统化归为正规系统时，要增加所使用的符号数目并增加出现在系统中的符号串的长度。

波斯特使用正规系统和递归可枚举集（即有一个一般递归函数枚举的集合，波斯特把空集也包括在内）的概念定义了一般递归函数。现在我们来看一看他所用的方法。他用仅由1构成的特殊序列1, 11, 111, …表示直观的自然数1, 2, 3, …。接着，引进字母b，并考察由1和b组成的符号串，如11b1b11。在这些符号串上的运算，如“b1bP产生P1bb1”，称为正规运算。上述的正规运算仅仅应用于从b1b开始的符号串，从给定的符号串首先去掉开始的b1b，然后在末尾加上1bb1，就可得到导出的符号串，这样，从b1bb就变成b1bb1。一个任意的正规运算的形式是“gP产生P g'”。一个正规系统由1和b构成的初始符号串A，和正规运算“$g_i P$ 产生P g_i'”（i =1, 2, …, n）的有穷集合所组成。其导出符号串由初始符号串A和从A重复应用n个正规运算所得到的一切符号串组成。每一正规系统唯一地定义一个正整数集合（可以空），即由这些导出的符号串（仅由1组成）所表示的整数集。波斯特证明了每一递归可枚举的正整数集都是由某个正规系统所定义的正整数

集,反之亦然。由于"递归可枚举集"可以定义"一般递归函数",因而，波斯特的正规系统可以计算的函数等价于一般递归函数，可机算函数和λ可定义函数。

波斯特的系统是近代程序语言的理论模型，为后来的形式语言的发展提供了基础。

*　　*　　*

我们在以上四节介绍了四种算法模型的历史发展，丘吉论题和判定问题的一些重要结果。其中，丘吉论题具有很重要的作用。现在我们可以对它作出有力的辩护了。下面我们引述克林在1952年《元数学导论》一书中给出的明证。①

(A) 启发式的证明

(A_1) 就已探究过的来说，每个特殊的能行可计算函数，以及每个由一些函数而定义别的函数的运算，都证明是一般递归的。

(A_2) 用以证明好些能行可计算函数是一般递归函数的方法，已经发展到这样的地步，使得几乎没有疑问地否定了下列的可能的，即能够写出一个能行过程以决定一个函数的值，但却不能用上述各方法把它变成该函数的一般递归定义。

(A_3) 有好些方法可以期望得出一般递归函数类以外的函数的，但一经探究都表明了，或者这方法并未超出一般递归函数的范围，或则该新函数不能当作是能行地可定义的，即它的定义并没有给出能行计算过程。在特例，如康托尔的对角线方法便属于后者。

(B) 各种表述的等价性

(B_1) 对能行可计算函数集可有好几种刻划，都具有同样的启发式的特性(A)。但它们都和一般递归性相等价；即它们所描述的函数集都是一样的。

一般递归性，λ可定义性，可机算性，典范系统或正规系统，这几个非常不同的观念都引到同一的函数集，这一事实便是一个极

①《元数学导论》第353-358页。

坚强的证据，指明这一集合是非常根本的。

(B_2) 各主要观念的几种表述方式都是等价的，也就是说，这些观念具有一种‘ 稳定性。

例如，对一般递归性来说，其形式系统可以有好几种等价的选择。

(C) 图灵的计算机概念

图灵的可机算函数是那些可用机器计算的函数，照他的分析，该机器是用以重新作出计算员所能实行的一切运算，依照预先指定的指令而动作。因此，图灵的观念是直接企图数学地表述能行可计算性观念的结果，其他的观念则是从不同的地方出发的，只是后来才和能行可计算性等同起来的。因此，图灵的表述便是丘吉论题的一个独立的叙述。波斯特也给出类似的表述。

(D) 丘吉提出的符号逻辑与符号算法两种方法，可归入 (A_1) .

以上是克林所做的总结，实际上也是对递归论早期发展史的主要成果所做的总结，这对我们学习20世纪30年代的数理逻辑史有重要的指导作用，所以，我们特摘录于此作为一个小结。

第六节　塔尔斯基证明不可判定性的一般方法

在前几节中，我们在论述几个算法模型的发展时，也谈到了几个重要的关于判定问题的定理，如关于哪些等式系统定义一般递归函数一般是不可判定的，形式算术系统及其一致的扩张是不可判定的，一阶谓词演算是不可判定的，等等。从这些结果我们可以看到，我们所使用的证明方法有两种。一种是直接方法，例如在证明形式算术系统的不可判定性时，使用了一般递归函数在形式算术系统中的数字可表示性概念，这是从哥德尔不完全性定理的证明方法发展而来的。应用这种方法要有一个条件：即在所考察的理论中要包括足够强有力的算术工具，使得一般递归函数可在

其中数字表示。第二种证明不可判定性的方法，如把一阶谓词演算的不可判定性化归为形式算术系统的不可判定性，这是通过从形式算术系统的公理中除去非逻辑公理而得到的。这是一种间接方法，是把某个理论T_1的判定问题化归为判定问题已获解决的另一个理论T_2的判定问题。但是从一个已知是不可判定的理论除去一些公理而得到另一个理论的不可判定性这种间接方法并不是普遍适用的，它只能应用于个别情况。因此，间接方法就要加以推广。著名学者塔尔斯基是不可判定性间接证明方法的创始人。他在1938—1939年从事这一课题的研究，取得了很多成果。他在1948年符号逻辑学会的一次讨论会上报告了这些成果，其摘要于1949年发表在《符号逻辑杂志》第14卷上，题为《论本质的不可定性》，其详细的结果的论文形式（题为《证明不可判定性的一般方法》）收入1953年出版的《不可判定的理论》一书。①本节我们主要评述塔尔斯基的方法，把它作为数理逻辑发展初期的终结。

一、若干基本概念

塔尔斯基所讨论的对象，称为标准形式化的理论，简称理论。它们是在带等词的一阶谓词演算中可形式化的理论。

一个给定的理论T，其形式语言基本上与形式算术系统的形式语言相同。初始符号分为个体变元和常项两类。逻辑常项有：联结词[¬（否定词），→（蕴涵词），∧（合取词），∨（析取词）]，量词符号[∀（全称号），∃（存在号）]，等词（=）。非逻辑常项有常谓词，函数符号，个体常项。项和公式的定义与形式算术系统中的项和公式的定义类似。个体变元和个体常项是项，复合的项可通过使用n元函数符号于n个较简单的项而得到。同样，一个原子公式是通过使用n元谓词（包括常谓词和等词，后者可看成是一个二元谓词）于n个任意的项而到的；复合公式是从比较简单的公

①A. Tarski in collaboration with A. Mostowski and R. M. Robinson: Undecidable Thearies, Amsterdam, 1953, pp. 1—35.

式使用联结词和量词构成的。在一个公式中变元的出现或者是自由的，或者是约束的。没有自由变元的公式称为命题。

在给定了一套形式语言之后，一个理论T可以有逻辑公理和推演规则。T的逻辑公理和推演规则同形式算术系统。逻辑公理的集合通常是无穷的，也可以选择一种有穷的逻辑公理的集合。在适当选定了逻辑公理之后，推演规则可以只有一条蕴涵规则。一个命题称为从一组命题Σ逻辑可推演的（ 简称可推演的），如果它能从Σ的命题和逻辑公理通过推演规则而得到。一个命题称为逻辑有效的，如果它能从逻辑公理推演出来，即从空命题集合可推演出来。

为了定义一般的有效命题的概念，一种办法是从T的命题中选出一组命题（ 有穷或无穷），称为非逻辑公理。一个命题是有效的,当且仅当它可从这组命题 非逻辑公理)推演出来,即可从所有公理（ 包括逻辑的和非逻辑的公理）集合推演出来。用这种办法来定义有效性的那种理论，称为可公理地建立的理论，简称公理理论。对公理理论来说，常用‘ 可证的”来代替‘ 有效的”。对非公理理论的有效性概念有其他定义方法。但是，我们假定对每一个所讨论的理论，有效性概念已用这种方式或那种方式定义了；也假定在这种定义下，从一组有效命题逻辑可推演的命题是有效的，因此每一逻辑有效命题是有效的。使一个理论T的一切有效命题都满足的一种可能解释称为T的模型。

一个理论是由它的一切有效命题的集合唯一决定的；如果两个理论的有效命题集合是重合的，那么这两个理论就是同一的。一个公理理论是由它的非逻辑常项和非逻辑公理唯一决定的。以后当我们说到一个理论的常项和公理时，是指非逻辑常项和非逻辑公理。

塔尔斯基使用了哥德尔的配数法，将公式集合变为一个数论谓词。因此，我们说公式的一个集合是一般递归的（ 简称递归的），如果相应的数论谓词是一般递归的。对一个公理理论，我们

要求它的所有非逻辑公理的集合是递归的。如果对任一理论T，存在着它的有效命题的一个递归集合$\sum$，使得T的每一有效命题可从这个集合推演出来，那么T就称为可公理化的理论；如果集合Σ是有穷的，T就称为有穷可公理化的理论。因此，每一可公理地建立的理论在上述意义上就是可公理化的理论，每一可公理化的理论也可表示为可公理地建立的理论。

一个理论T_1称为另一个理论T_2的子理论，如果T_1中的每一有效命题也在T_2中有效；在同样的条件下，T_2称为T_1的一个扩张。

T_1的一个扩张T_2称为有穷扩张，如果存在T_2的有效命题的一个有穷集合Σ，使得T_2的每一有效命题可从T_1中有效的或属于Σ的命题集合推演出来。

一个理论T是一致的（无矛盾的），如果不存在一个命题A使得A和$\neg A$在T中皆有效。

一个理论T是完全的，如果对T的每一命题A，或A或$\neg A$在T中是有效的；或者说，不存在与T不同但与T有同样常项的T的一个一致扩张。

两个理论T_1和T_2是相协的，如果它们有共同的一致扩张。这也等于说，T_1和T_2的并是一致的。

一个理论T是可判定的，如果它的一切有效命题的集合是递归的。从直观上说，T可判定就是指T有一个判定程序，能够判定任一命题是否有效。显然每一可判定的理论是可公理化的理论，但反过来一般不成立。

一个理论T称为本质上不可判定的，如果不仅T本身是不可判定的，而且对与T有同样常项的T的每一个一致的扩张也是不可判定的。根据罗塞尔1936年对丘吉定理的证明，形式算术系统（如果它是一致的）便是本质上不可判定的。因而公理集合论的几个系统（如果它们是一致的）也是本质上不可判定的（因为它们包括通常的算术在内）。

有了以上一些重要概念，下面我们来陈述塔尔斯基建立的一些重要定理，并介绍几个定理的证法。

二、一些重要定理

定理1．对一个完全的理论T来说，以下三个条件是等价的：(i) T是不可判定的；(ii) T是本质上不可判定的；(iii) T不是可公理化的。

证明．我们证 i) 蕴涵(iii)。假定T可公理化，即存在由有效命题组成的一个递归集合Σ，使得T的一切有效命题可从Σ推演出来。已知T是完全的。由上可得：对T的任一命题A，总可判定或A或¬A从Σ可推演，这也就是说，T是可判定的。这与(i)矛盾。因此，(i)蕴涵(iii)。定理的其余部分可从有关定义得出。

定理2．令 T_1 和 T_2 是两个理论，使得 T_1 是 T_2 的一个一致的扩张。如果 T_2 是本质上不可判定的，则 T_1 也是本质上不可判定的。

证明．令 T_3 是由以下条件决定的理论：A是 T_3 的有效命题当且仅当A是 T_2 的一个命题并且在 T_1 中是有效的。显然，T_3 是 T_2 的一个扩张，并与 T_2 有同样常项。另外，由于 T_1 是 T_3 的一个扩张，并且还是一致的，因此，T_3 也是一致的。再据题设，T_2 本质上不可判定，故可得：T_3 是不可判定的。据 T_3 的构造，如果 T_1 有判定程序，那么 T_3 就有判定程序。因此，T_1 是不可判定的。上述论证同样可应用于 T_1 的每一个一致的扩张。由此可得：T_1 是本质上不可判定的。

定理3．令 T_1 和 T_2 是两个具有同样常项的理论，使得 T_2 是 T_1 的一个有穷扩张。如果 T_2 是不可判定的，则 T_1 也是不可判定的。

证明．据有穷扩张的定义，存在 T_2 的命题 A_1 …，A_n 的一个有穷序列，使得 T_2 的一个命题是有效的当且仅当它从 T_1 的一切有效命题的集合再加上 A_1，…，A_n 可推演出来。据蕴涵引人

规则，T_2一个命题B在T_2中是否有效等价于以下命题：

$$A \wedge A \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$$

在T_1中是否有效的问题。因此，T_1的每一个判定程序就导致T_2的一个判定程序。由于T_2是不可判定的，因而T_1就不能是可判定的。

定理4．令T_1和T_2是两个相协的理论，T_2的每一常项也是T_1的一个常项。如果T_2是本质上不可判定的并且是有穷可公理化的，则T_1是不可判定的，并且与T_1有同样常项的T_1的每一子理论也是不可判定的。

证明。令T是T_1和T_2的并。据定理2，T（作为T_1的一个一致的扩张）是（本质上）不可判定的。T和T_1显然有同样常项，由于T_2是有穷可公理化的，因而T就是T_1的一个有穷扩张。因此据定理3，T_1是不可判定的。如果T_1'是与T_1有同样常项的子理论，则T_1'和T_2显然是相协的，并且T_2的每一常项是T_1'的一个常项；根据上面同样的论证，T_1'是不可判定的。

塔尔斯基为了进一步证明定理，引进两个重要概念——可解释性和弱可解释性。

设有一个理论T。给定一个不属于这个理论的常项，例如，一个二元谓词＜（小于）。＜在T中的可能定义是具有以下形式的任一命题：

(1) $\forall a \forall b(a < b \leftrightarrow A)$，

这里A是T的一个公式（a和b是任意两个不同的变元，使得与它们不同的变元没有一个在A中自由出现）。显然，(1)不是T中的一个公式，但它是一个公式，实际上它是在T的每一扩张（含有＜作为常项）中的一个命题。

如果给定的常项是一个二元函数符号十，那么这个常项在T中的可能定义就是以下形式的命题：

(2) $\forall a \forall b \forall c(a=b+c \leftrightarrow A)$，

这里A也是T的一个公式。

其他谓词和函数符号（个体常项是零元函数符号）的可能定义与以上类似。

令 T_1 和 T_2 是两个理论。首先假定它们没有共同的非逻辑常项。在这种情况下，我们说 T_2 在 T_1 中是可解释的，如果我们能构造 T_1 的扩张，在其有效命题的集合中包含 T_2 的非逻辑常项的可能定义，使得所得到的 T_1 的扩张也是 T_2 的一个扩张。

一个理论 T_2 称为在 T_1 中是弱可解释的，如果 T_2 是在与 T_1 有同样常项的 T_1 的某个一致的扩张 T 中可解释的。

塔尔斯基借助以上概念，将上述的定理2和定理4作了推广：

定理5．令 T_1 和 T_2 是这样的两个理论：T_1 是一致的，并且 T_2 在 T_1 中是可解释的。由此有：

(i) 如果 T_2 是本质上不可判定的，那么 T_1 也是；

(ii) 如果 T_2 有一个有穷可公理化的、本质上不可判定的子理论，那么 T_1 也有。

定理6．设 T_1 和 T_2 是两个理论，使得 T_2 在 T_1 中是弱可解释的。如果 T_2 是本质上不可判定的并且是有穷可公理化的，那么：

(i) T_1 是不可判定的，与 T_1 有同样常项的 T_1 的每一子理论也是不可判定的；

(ii) 存在 T_1 的一个有穷扩张，它与 T_1 有同样常项并且是本质上不可判定的。

它们的证明从略。由定理5和定理6，我们很容易看出它们是定理2和定理4的推广，因为如果一个理论 T_1 是另一个理论 T_2 的扩张，那么 T_2 显然在 T_1 中是可解释的；如果 T_1 和 T_2 是相协的并且 T_2 的每一常项也是 T_1 的常项，那么 T_2 在 T_1 中就是弱可解释的。

塔尔斯基还将以上方法和结果加以推广，这里不赘。

由上面所介绍的塔尔斯基间接判定方法的主要结果，我们可以看出，这是一种崭新的证明不可判定性的一般方法。这种方法吸收了哥德尔不完全性定理证明过程中的配数法和元数学算术化

的方法，推广了丘吉证明一阶谓词演算不可判定的化归方法，在数理逻辑发展史上具有重要意义。它开辟了许多新的研究领域，解决了一大批数学理论的不可判定性的证明问题。

在塔尔斯基方法中，最重要的定理是定理6。关键是要找到一个本质上不可判定的并且是有穷可公理化的理论，这一理论可在一些理论中弱可解释，因而应用定理6就可得到一批理论的不可判定性。塔尔斯基考察了两种理论，它们都不符合要求。我们先看自然数算术的一个形式理论N。它的形式语言与我们在前面所说的形式算术系统的形式语言相同，其中非逻辑常项是+（加），·（乘），'（后继），0（数零）。N的一个命题是有效的，当且仅当它在以下模型中是真的：变元的变程是自然数集合，非逻辑常项具有普通的算术意义。为方便计，我们把这个模型记为〈N, 0, '，+，·〉，N读为"自然数集合"，0读为"零"，'读为"后继"，+读为"加"，·读为"乘"。显然，N是完全的，因为它的一切有效命题的集合与在上述解释（模型）中可满足的命题的集合是重合的。N是不可判定的，这可以从以下两个结果得出：(1)如果Σ是与N中有效语句相对应的所有哥德尔数的集合，则Σ在N中不是数字可表达的；(2）自然数的每一递归集合在N中是数字可表达的（论证与丘吉的不可判定性定理相仿）。按定理1，N就是本质上不可判定的，N也不是可公理化的，更不是有穷可公理化的。因此，定理6不能应用于N。

N不是一个公理理论，但它有许多公理子理论。最重要的一个就是形式算术系统，根据丘吉的不可判定性定理，它是不可判定的，因而就是本质上不可判定的。形式算术系统当然是可公理化的理论，但由于归纳公理在形式算术系统中只能用模式加以表述，而模式是无穷多的公理的集合，因而形式算术系统不是一个有穷可公理化的理论。这样，定理6也不能用于它。

塔尔斯基和莫斯托夫斯基在1939年发现了自然数算术的一个有穷可公理化的和本质上不可判定的子理论 Q，并利用它建立

了关于自然数算术和整数算术的任一子理论，以及各种环论的不可判定性。这些结果于1949年发表。1950年，R. 罗宾逊证明Q可以简弱。他们三人合作，在1951至1952年，利用简化了的理论Q证明了自然数算术的每一子理论和各种环论都是不可判定的。①塔尔斯基本人利用他的方法证明了群论，格论和射影几何的不可判定性。这些已超出本书范围，这里不再赘述。

由上可见，塔尔斯基的间接判定方法在数理逻辑发展史上具有承先启后的作用，它开辟了关于不可判定性理论的新领域，使一大批成果如雨后春笋般地建立起来。因此，我们把塔尔斯基的方法作为数理逻辑发展初期的终结成果，这是非常合适的。

三、不可判定性成果的哲学意义

丘吉的形式算术不可判定性定理和一阶谓词演演不可判定性定理，以及塔尔斯基等人所得到的一批不可判定性定理具有很重要的哲学意义。

著名逻辑学家罗塞尔在评论丘吉的一阶谓词演算不可判定性定理时说：“丘吉定理不只是说还没有找到一个解，或难于找到一个解，而是说，根本就没有解。进一步说，如果我们添加若干另外的公理（除非我们增加的公理不幸导致矛盾，这样每一命题就成为可推导的），那么定理仍然继续成立。把丘吉定理应用到我们关于数学公理的完全集合，我们可得结论：决不可能有一个系统性的或机械的程序来解所有的数学问题。换句话说，数学家永不会被机器所代替。”②英国逻辑学家A. G. 汉密尔顿（或译哈密尔顿）在《数学家的逻辑》（1978年出版）一书中说：“形式系统的递归可判定性蕴涵着存在一个计算机程序，对给定的系统的任意合式公式，这个程序能判定此合式公式是否是定理（当然事先假定计算机是足够大的）。这样，比如说，我们用一架计算机和单一的程序，来

①见Undecidable Theories, pp. 39—74。

② Rosser: Logic for Mathematicians, New York, 1953, p. 162.

判定阿贝尔群和它们的元素的语句是否是定理，这是可能的。这样的一个程序可能极其复杂，而判定复杂的语句可能需要很长的机器时间和可观的存贮量，以至在实际的意义下是无用的，但我们对这种可能性感兴趣。对上面列出的递归不可判定的群论和其它的系统，企图寻求一个对应的程序的不可能性，对此我们也同样感兴趣。特别，ZF的递归不可判定性蕴涵着不存在一个可用的指出一般的数学语句是否是定理的通用程序。计算机最终可以管理世界,但决不能代替数学家。”①

笔者完全同意这两位学者的观点，这种观点是符合马克思主义的。我们在论述哥德尔不完全性定理的哲学意义时曾经指出，人和计算机之间的关系是辩证的，重点放在批评贬低计算机作用的观点方面。现在我们要根据丘吉定理等一大批不可判定性的结果来批评一些学者提出的“计算机比人更聪明”“计算机可以完全代替人的思维”等等错误观点。这些观点的最大错误在于形而上学地割裂了计算机与人的思维的辨证关系。我们承认计算机模拟人脑的水平会越来越高，有无限发展的前景，这是因为人类的思维具有无限发展的可能性。但这和“计算机比人更聪明”，“计算机可以完全代替人的思维”等等观点是风马牛不相及的。不可判定性的成果告诉我们，计算机决不能代替数学家，这就是说，决不能代替人的数学思维，当然，更不能代替人的全部思维。人的创造性思维永远是需要的。计算机不过是人脑的延伸。任何计算机工作的程序最初总是人设计的，不论将来出现怎样高度自动化的、具有自身调整及自身组织能力的机器，它们的设计、控制还是由人根据社会需要进行的。马克思主义告诉我们，思维是存在的反映，是对客观世界的能动的反映活动；同时思维是与意识相联系的，意识不但是自然界长期发展的结果，而且是社会长期发展的结果。人的社会生活，劳动和语言在意识的发生和发展中起着重大的作用。现

① 哈密尔顿：《数学家的逻辑》，骆如枫等译，商务印书馆1989年出版，第284--49页。

代的计算机无论构造得多么精巧，它是决不会有意识的。在思维和意识紧密相联的意义上，计算机就不可能有思维。我们只能说，计算机可以模拟人的思维活动，在人类世代的无穷更迭的过程中，“电脑”可以逐步逼近人脑，但决不能穷尽人的与意识不可分割的思维。说计算机比人更“聪明”，这个提法本身就是不科学的。在用计算机模拟人脑的一些活动时，把思维的某些过程形式化是必要的。但不论这种模拟达到多么高的水平，也不能认为就有了能够象人一样进行思维的机器，因为思维的本质不是靠形式化的方法所能揭露无遗的，而且正如哥德尔不完全性定理所指明的，自然数算术不能完全形式化，因而人的思维更是不可能完全形式化的。此外，计算机只能计算一般递归函数，我们决不能把人们的思维过程完全化为一般递归函数去让计算机计算。恩格斯说得好：“终有一天我们可以用实验的方法把思维‘归结’为脑子中的分子的和化学的运动；但是难道这样一来就把思维的本质包括无遗了吗？”①

综上所说，不可判定性的成果不但揭示了形式系统的内在局限性，而且揭示了计算机的内在局限性。这些成果以否定的形式为人工智能的发展指明了正确的道路。我们的结论是，在计算机是人脑的延长这一前提下，计算机和人脑的矛盾是一对辩证矛盾，它们既对立，又统一，由此推动人的思维和计算机科学的飞速发展。恩格斯说：“一方面，人的思维的性质必然被看作是绝对的，另一方面，人的思维又是在完全有限地思维着的个人中实现的。这个矛盾只有无限的前进过程中，在至少对我们来说实际上是无止境的人类世代更迭中才能得到解决。从这个意义来说，人的思维是至上的，同样又是不至上的，它的认识能力是无限的，同样又是有限的。按它的本性、使命、可能和历史的终报目的来说，是至上的和无限的；按它的个别实现和每次的现实来说，又是不至上的和

①恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社1971年版，第226页。

有限的。”①正是人类思维的至上性、无限性同不至上性、有限性的矛盾决定着计算机同人脑的矛盾。一方面，由于人的思维具有无限性，因而计算机模拟人脑的能力是无限的；另一方面，按这种模拟的个别实现和每次的现实来说，又是有限的，即计算机对人脑的模拟是在完全有限地模拟着的个别计算机中实现的。数理逻辑中一大批不可判定性的成果更加深刻地揭示了计算机的这种有限性。总之，我们应当辩证地看待计算机和人脑的矛盾，这个矛盾只有在无限的前进过程中，在无止境的人类世代更迭中才能得到解决。

①《马克思恩格斯选集》，第3卷，第126页。

人名译名对照表

Abelard, Peter 彼得·阿贝拉克

Ackermann, W.阿克曼

Albert of Saxony 萨克森的阿尔伯特

Albert the Great 大阿尔伯特

Antiphon 安蒂丰

Arbib, M. A.阿尔贝勃

Archimedes 阿基米得

Aristotle 亚里士多德

Autolycus of Pitane 奥托尼克

Bach 巴赫

Behmann, H.贝曼

Beltraumi, E.贝特拉米

Bentham, G.边沁

Berry, G.伯尔利

Bochenski, I. M.波亨斯基

Boethius 波爱修

Bolyai, John 波里埃

Bolzano, B.鲍尔查诺

Boole, G.布尔

Borel, E.色瑞尔

Brouwer, L. E. J.布劳维尔

Burali-Forti, C.布拉里一福蒂

Buridan, J.布里丹

Bryson 布里逊

Cantor, G. 康托尔
Carnap, R·卡尔纳普
Cauchy, A柯西
Chrysippus 克吕西波
Church, A·丘吉
Chwistek, L. 赫维斯泰克
Cohen, P. J·科恩

Dedekind, J. W R. 戴德金
Democritus 德谟克利特
de Morgan, A. 德摩根
Descartes, R·笛卡尔
Dumitriu, A. 杜米特留

Escher 埃舍尔
Eubulides 欧布里得
Euclid 欧几里得
Eudoxus 欧多克斯
Euler, L·欧拉

Fraenkel A· 弗兰克尔
Frege, G 弗雷格

Galileo, G·伽利略
Gauss, C. F. 高斯
Gentzen, G·甘岑
Gergonne, J. D·吉尔哥思
Glivenko, V·格里文科
Godel, K. 哥德尔

Kuratowski, K.库拉托斯基

Lambert, J. H.兰贝特

Lanford, C. H.兰福德

Leibniz, G. W.莱布尼茨

Lesniewski, S.列斯尼夫斯基

Lewis, C. I.路易斯

Lobachevsky, N. I.罗巴切夫斯基

Lowenheim, L.累文汉

Lukasiewicz, J.卢卡西维茨

Lullus, R.卢里

Luroth, J.吕洛特

Mates, B.梅兹

McColl, H.麦柯尔

Meinong, A.梅农

Mrimanoff, D.梅里马诺夫

Moody, E.穆迪

Mostowski, A.莫斯托夫斯基

Nagel, E.奈格尔

Newman, J. R.纽曼

Nicod, J. D. P.尼考

Paris, J.帕里斯

Pascal, B.巴斯加尔

Pasch, M.帕什

Paul of Venice威尼斯的保罗

Peacock, G.皮考克

主要参考文献

Benacerraf, Paul and Hilary Putnam (eds.)

Philosophy of Mathematics: selected readings, Prentice-Hall, INC, 1964.

Bernays, P. and Fraenkel, A. A.

Axiomatic Set Theory, Amsterdam, 1958.

Bochenski, I.

A History of Formal Logic, Notre Dame, 1961.(本书将它缩写为HFL)

Boole, G.

1. The Mathematical Analysis of Logic, Cambridge, 1847; Reprinted, Oxford, 1951. (MAL)
2. An Investigation of the Laws of Thought, London, 1854.

Davis, M. (ed.)

The Undecidable, New York 1965.

de Morgan, A.

Formal Logic (1847), reprinted, London, 1926.

Frege, G.

1. The Foundations of Arithemetic, English translation of Frege 1884 by J. Austin, Oxford, 1950. (F. A.)
2. Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege, edited by P. Geach and M. Black, Oxford, 1952. (P. W. F.)

Godel, K.

The Consistency of the Continnum Hypothesis, Princeton, 1940.

Heyting, A.

Intuitionism, Amsterdam, 1956.

Kneebone, G. T.

Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics, London' 1963.

Peirce, C. S.

Collected papers of C. S. Peirce, vol. 3, edited by C. Hartshorne and P. Weiss, Harvard University Press, 1933. (C. P.)

Styazhkin

History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano, The M. I. T. Press, 1969. (HML)

Tarski, A.

1. Logic, Semantics, Metamathematics, Oxford, 1956. (L. S. M.)
2. Undecidable Theories, in collaboration With A. Mostowski and R. M. Robinson, Amsterdam, 1953.

van Heijenoort, Jean (ed.)

Prom Prege to Godel (A Source Bookin Mathematical Logic, 1879—1931),
Harvard Universtiy Press, 1967. (F. G.)
Whitehead, A. N and Russell, B.
Principia Mathematica, 3 volumes Cambridge, 1910—1913; second edition, 1925—1927. (P. M)
王宪钧
《数理逻辑引论》,北京大学出版社,1982。
克林著,莫绍揆译
《元数学导论》(上下两册),科学出版社,1984—1985。
克莱因著 北大数学系数学史翻译组译
《古今数学思想》(四册),上海科技出版社,1979—1981。
莱布尼茨著 陈修斋译
《人类理智新论》,商务印书馆,1982。
威廉·涅尔等著 张家龙和洪汉鼎译
《逻辑学的发展》,商务印书馆,1985。
肖尔兹著 张家龙译
《简明逻辑史》,商务印书馆,1977。